

RZ DRI - 211016		
Начало работы над материалом	Публикация в сети	Последние исправления
май 2012 г.	21.10.2016 г.	14.09.2018 г.
Примечания: рукопись. Размещение: http://www.dri1.cc.ua/RZ.htm . Резервное размещение: _____. Размещение ссылки: «Новые идеи и гипотезы». Математика. http://new-idea.kulichki.net .		
Страниц: 44		

$\underline{u} \uparrow a$

Рабочая записка:

**Упругие и пластические деформации на примере цилиндрического тонкостенного стального баллона. Изменение объема. (Часть 1, теоретическая).
«Тонкостенный баллонез 1/2».**

Ведущий инженер-технолог ИЭС им. Е. О. Патона НАН Украины, г. Киев, Р. И. Дмитриенко,
E-mail: dri1@ukr.net.

Ключевые слова: *баллон, сталь, внутреннее давление, деформации, напряжения, гидроиспытания, теории пластичности, изменение объема, "К-фактор"*.

Представлены теории упругого и пластического деформирования на примере стальной тонкостенной цилиндрической оболочки с днищами изготовленной из изотропного материала, нагружаемой внутренним давлением. Приведены расчеты по изменению ее объема на всей стадии нагружения. Используется «единая кривая» деформирования, построенная по диаграмме одноосного растяжения, деформационная теория пластичности и теория пластического течения. Показано условие предельного состояния. Библиогр. 11, рис. 5.

1. Общие замечания.

Первоначальные значения радиуса срединной поверхности и толщины стенки тонкостенной цилиндрической оболочки, обозначим через r_o, s_o , а текущие, изменяемые в процессе деформирования под нагрузкой, через r, s . В упругой области изменения незначительны, поэтому ими обычно пренебрегают, в области же пластических деформаций, изменения существенны и пренебрегать ими не следует. В излагаемом материале под нагрузкой в основном подразумевается внутреннее давление, при дополнительном воздействии на цилиндрическую часть наружного давления это будет оговариваться.

Условно, тонкостенной, цилиндрической оболочка считается тогда, когда выполняется условие: $\frac{r_o}{s_o} = \frac{r_1 + r_2}{2s_o} \geq 10$, [1, 2], где $r_o = \frac{r_1 + r_2}{2}$, а r_1, r_2 - радиусы внутренней и наружной поверхности. Если оболочка имеет днища, то будем называть ее баллоном, или закрытым цилиндром - внутреннее давление P , действуя на днища, создает осевое усилие и, следовательно, осевые напряжения. Цилиндрическую часть трубопровода тоже можно

рассматривать как баллон, т.к. от внутреннего давления создается осевое усилие. В случае отсутствия днищ у оболочки, осевые напряжения от внутреннего давления не возникают - оболочку будем называть трубой или открытым цилиндром.

Радиальные напряжения в трубе/баллоне считаем равными нулю, т.е. принимаем плоское напряженное состояние. Для трубы, вследствие отсутствия днищ, оно вообще является линейным. Вследствие геометрической и силовой симметрии, касательные напряжения на площадках параллельных и перпендикулярных оси равны нулю, т.е. эти площадки являются главными. Для участков значительно удаленных от днищ, радиальные перемещения не зависят от положения вдоль оси. Поэтому можно рассматривать часть трубы/баллона, вырезанную двумя сечениями, нормальными к оси трубы (гильзу), и составлять уравнения равновесия элемента оболочки, выделенного из этой части двумя радиальными сечениями, составляющими между собой некоторый угол. Это справедливо как для упругой, так и для пластической стадии нагружения. Стоит заметить, что если гильзу рассматривать в пластической области, то, как показано ниже, из предположения о несжимаемости, она будет находиться в условиях плоского деформированного состояния - осевые деформации равны нулю. Вообще, внутреннее давление в цилиндрической оболочке прикладывается к внутренней поверхности, а наружное, к внешней, но в тонкостенном представлении давления будем относить к срединной поверхности, что естественно приводит к некоторым незначительным погрешностям. Но чем более тонкостенная оболочка, тем они меньше. Также принимаем, что кольцевые напряжения распределены по толщине стенки равномерно. На самом же деле они неравномерны и описываются зависимостями Ляме, и чем более толстостенна оболочка, тем неравномерность больше и наоборот. Осевые же напряжения не зависят от степени толстостенности и всегда распределены равномерно, это вытекает из положения, что при нагрузке давлением, сечения перпендикулярные оси всегда остаются плоским. Особые случаи будем оговаривать отдельно. В первом приближении этими положениями можно пользоваться и в случае не тонкостенной трубы.

С чертой сверху обозначены обычные деформации, напряжения без учета изменения размеров, и другие величины, используемые при расчетах в упругой зоне, без черты - логарифмические деформации, напряжения с учетом изменения размеров, и другие величины, используемые в общем решении по теориям пластичности. Также с чертой сверху обозначена диаграмма растяжения стали, без черты - действительная диаграмма деформирования. При малых деформациях, по крайней мере, упругих можно принимать равенство логарифмических и обычных деформаций. Если в общих решениях по теориям пластичности коэффициент Пуассона не берется равным 0,5, то при малых деформациях они переходят в упругое решение.

В излагаемом материале описывается тонкостенная цилиндрическая оболочка с днищами (баллон), нагруженная внутренним давлением, которое действует как на цилиндрическую часть, так и на днища. Отличные от этого случая варианты, отдельно оговариваются. Представлены теоретические положения и их обоснования, но основанные на реальном опыте. Экспериментальные данные, полученные при испытаниях тонкостенных цилиндрических оболочек с днищами, будут приведены в следующих работах.

По мере уточнения некоторых данных, либо появления новых, рабочая записка в процессе своего существования может редактироваться и дополняться автором! (пока автор ласты не склеит, а потом сайт будет удален).

2. Базовый упругий расчет.

Выкладки для упругой области нагружения приведены в качестве ознакомления. Расчеты производятся по первоначальным геометрическим параметрам, в дальнейшем изложении такие расчеты называются базовыми упругими. Более точные зависимости, с учетом изменения размеров выводятся из деформационной теории пластичности как частный случай и приведены в разделе 6.

Внутреннее давление P , действующее на днище баллона, создает в цилиндрической его части, площадью поперечного сечения $A_o = 2\pi r_o s_o$ (площадь кольца), осевое усилие $N_z = P \cdot \pi \cdot r_o^2$ и осевые напряжения $\bar{\sigma}_z = \frac{N_z}{A_o} = \frac{Pr_o}{2s_o}$. При отсутствии днищ, (для трубы), естественно, что: $N_z = \bar{\sigma}_z = 0$. Вместо радиуса можно было бы использовать диаметр срединной поверхности: $D_o = 2r_o$.

Из равновесия части цилиндрической оболочки, рассеченной осевой плоскостью, находим кольцевые (окружные) напряжения: $\bar{\sigma}_t = \frac{Pr_o}{s_o}$. Отсюда видно что, для баллона: $\bar{\sigma}_t = 2\bar{\sigma}_z$. В общем случае напряжения между собой независимы, а выражение одних напряжений через другие зависит от формы конструкции и нагруженности.

Радиальные напряжения $\bar{\sigma}_r$, которые мы приравниваем нулю, на самом деле на внутренней части стенки равны внутреннему давлению, а на наружной - наружному, и по толщине стенки в упругой стадии изменяются плавно по зависимостям Ляме. Понятно, что они намного меньше кольцевых, поэтому в тонкостенном представлении ими можно пренебречь. Тоже о радиальных напряжениях, кроме распределения, касается и случая пластического деформирования.

Кольцевые и осевые напряжения, а также в принципе и радиальные, являются главными напряжениями, т.е. на площадках, по которым они распределены, касательные напряжения равны нулю. Расписывая интенсивность напряжений через главные напряжения,

$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)^2 + (\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_3)^2 + (\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_1)^2}$, для баллона получаем:

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\bar{\sigma}_t - \bar{\sigma}_z)^2 + (\bar{\sigma}_z)^2 + (\bar{\sigma}_t)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{\sigma}_t = \frac{\sqrt{3}Pr_o}{2s_o}. \text{ Для трубы соответственно: } \bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_t.$$

Поскольку обычная деформация представляется как $\bar{e} = \frac{\Delta l}{l_o} = \frac{l - l_o}{l_o} = \frac{l}{l_o} - 1$, то обозначая через \bar{e}_t относительную деформацию (относительное удлинение) цилиндрической оболочки

в кольцевом направлении, и выражая ее через радиальное перемещение u_r , имеем:

$$\bar{e}_t = \frac{2 \cdot \pi (r_o + u_r) - 2 \cdot \pi \cdot r_o}{2 \cdot \pi \cdot r_o} = \frac{\Delta r}{r_o} = \frac{u_r}{r_o} \Rightarrow u_r = r_o \cdot \bar{e}_t.$$

Согласно закону Гука, для баллона в упругой области получаем:

$$\bar{e}_t = \frac{1}{E} (\bar{\sigma}_t - \mu \bar{\sigma}_z) = \frac{1}{E} \left(\frac{r_o P}{s_o} - \mu \frac{r_o P}{2s_o} \right) = \frac{r_o P}{s_o E} \left(1 - \frac{\mu}{2} \right), \quad u_r = r_o \bar{e}_t = \frac{r_o^2 P}{s_o E} \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) - \text{кольцевые деформации}$$

и радиальные перемещения для закрытого цилиндра. Для трубы, соответственно:

$$\bar{e}_t = \frac{\bar{\sigma}_t}{E} = \frac{r_o P}{s_o E}, \quad u_r = r_o \bar{e}_t = \frac{r_o^2 P}{s_o E}. \quad \text{Здесь и далее, } E, \mu - \text{модуль упругости, и коэффициент}$$

Пуассона (поперечной деформации) цилиндрической оболочки.

Например, для углеродистых и легированных сталей модуль упругости составляет $(2,0 \dots 2,2) \times 10^5$ МПа, а коэффициент Пуассона $0,24 \dots 0,3$. Модуль упругости с повышением температуры уменьшается. Следует заметить, что диаграмма растяжения образца в упругой области не является строго линейной, поэтому модуль упругости является угловым коэффициентом аппроксимирующей прямой.

Кольцевые деформации для закрытого цилиндра также можно выразить и через напряжения:

$$\bar{e}_t = \frac{\bar{\sigma}_t}{E} \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) = \frac{\bar{\sigma}_i}{\sqrt{3}E} (2 - \mu). \quad \text{При } \mu = 0,3, \text{ следует что } \bar{e}_t \approx 0,981 \frac{\bar{\sigma}_i}{E}, \text{ а при } \mu = 0,5$$

$$\bar{e}_t = \frac{3\bar{\sigma}_t}{4E} = \frac{\sqrt{3}\bar{\sigma}_i}{2E} \approx 0,866 \frac{\bar{\sigma}_i}{E}.$$

Аналогично, в упругой области осевые деформации \bar{e}_z представляются следующим

$$\text{образом. Для баллона: } \bar{e}_z = \frac{1}{E} (\bar{\sigma}_z - \mu \bar{\sigma}_t) = \frac{1}{E} \left(\frac{r_o P}{2s_o} - \mu \frac{r_o P}{s_o} \right) = \frac{r_o P}{s_o E} \left(\frac{1}{2} - \mu \right), \text{ а для трубы}$$

соответственно: $\bar{e}_z = -\frac{\mu r_o P}{s_o E}$. Умножая эти деформации на некую длину, получаем

$$\text{перемещения вдоль оси: } u_z = \Delta l = l_o \bar{e}_z.$$

Отношение $\frac{\bar{e}_t}{\bar{e}_z} = \frac{1 - \frac{\mu}{2}}{\frac{1}{2} - \mu}$ при $\mu = 0,3$ равно 4,25. При μ стремящимся к 0,5 это отношение

стремится к бесконечности. Интересно отметить, что по той же формуле определяется отношение деформации на наружной поверхности, при расчете баллона по толстостенной теории, что важно при тензометрии.

Деформации же, выражающиеся в изменении толщины стенки, для баллона и трубы составят:

$$\bar{e}_s = \frac{1}{E}(-\mu(\bar{\sigma}_t + \bar{\sigma}_z)) = -\frac{\mu}{E}\left(\frac{r_o P}{s_o} + \frac{r_o P}{2s_o}\right) = -\frac{3\mu r_o P}{2s_o E} \quad \text{и} \quad \bar{e}_s = -\frac{\mu r_o P}{s_o E} \quad \text{соответственно. Деформации}$$

толщины стенки имеют один порядок с остальными деформациями, но само ее изменение ничтожно мало, по крайней мере, в упругой области мы его не учитываем.

Для баллона и для трубы $\bar{e}_t > \bar{e}_z > \bar{e}_s$.

Выражая интенсивность деформаций цилиндрической стенки баллона, через линейные деформации получаем:

$$\bar{e}_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\bar{e}_t - \bar{e}_z)^2 + (\bar{e}_z - \bar{e}_s)^2 + (\bar{e}_s - \bar{e}_t)^2} = \frac{r_o P(1+\mu)}{\sqrt{3}s_o E}, \quad \text{либо же через напряжения:}$$

$$\bar{e}_i = \frac{\bar{\sigma}_t(1+\mu)}{\sqrt{3E}} = \frac{2\bar{\sigma}_i(1+\mu)}{3E}. \quad \text{Т.к. } \bar{e}_t = \frac{r_o P}{s_o E}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right), \quad \text{то, } \bar{e}_i = \bar{e}_t \frac{(1+\mu)}{\sqrt{3}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}. \quad \bar{e}_i = -\bar{e}_s \frac{2(1+\mu)}{3\sqrt{3}\mu}.$$

$$\frac{\bar{\sigma}_i}{\bar{e}_i} = \frac{3E}{2(1+\mu)}, \quad \text{при } \mu=0,3 \text{ следует } \frac{\bar{\sigma}_i}{\bar{e}_i} \approx 1,154 \cdot E. \quad \bar{e}_i \approx 0,867 \frac{\bar{\sigma}_i}{E}.$$

При $\mu=0,5$, имеем $\bar{e}_i = \frac{\sqrt{3}r_o P}{2s_o E} = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{e}_t \approx 1,155\bar{e}_t$ и $\bar{e}_i = \frac{\bar{\sigma}_i}{E}$. При изменении коэффициента

Пуассона от 0,3 до 0,5, коэффициент перед кольцевой деформацией изменяется практически линейно от 0,883 до 1,155.

Для трубы соответственно: $\bar{e}_i = \frac{2\bar{\sigma}_i(1+\mu)}{3E}$.

Для баллона выполняются выражения: $\bar{e}_t - \bar{e}_s = \sqrt{3}\bar{e}_i$ и $\bar{e}_t + \bar{e}_s = \frac{2\bar{\sigma}_i}{\sqrt{3E}}(1-2\mu)$.

В упругой области интенсивность напряжений пропорциональна интенсивности деформаций: $\bar{\sigma}_i = 3\bar{G}\bar{e}_i$, где для изотропного материала $\bar{G} = \frac{E}{2(1+\mu)}$. Также интенсивность

деформаций пропорциональна каждой из линейных деформаций, это же относится и к интенсивности напряжений и ее составляющих.

Чтобы избежать путаницы, следует отметить, что некоторые авторы, под

интенсивностью деформаций понимают выражение: $\frac{3\bar{e}_i}{2(1+\mu)}$. Оно представляет из себя

главную линейную деформацию вдоль направления растяжения образца. В таком случае коэффициентом пропорциональности между $\bar{\sigma}_i$ и \bar{e}_i выступает модуль упругости, т.е.

$$\bar{\sigma}_i = E\bar{e}_i.$$

Следует заметить, что если расчет вести не по первоначальным, а по измененным размерам, то погрешность очень незначительная, но растет с уменьшением толщины стенки, и/или увеличением давления. Находятся напряжения, затем деформации. По деформациям рассчитываются измененные значения радиуса и толщины стенки. Затем опять напряжения и т.д. Расчет быстро сходится. Чем более тонкостенный баллон, и чем больше давление, тем

больше требуется итераций для схождения. Аналитически, с учетом измененных радиуса и толщины стенки, напряжения представляется следующим образом:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}Pr}{2s} = \bar{\sigma}_i \frac{2(1+\mu)+e_i\sqrt{3}(2-\mu)}{2(1+\mu)-e_i\sqrt{3}\mu} = \bar{\sigma}_i k. \text{ При этом, } e_i = \bar{e}_i k, \text{ где коэффициент } k \text{ тот же что и}$$

при напряжениях. Уравнение для деформаций приводится к квадратному уравнению, из которого и находится e_i , при отрицательном корне из дискриминанта. Аналитическое решение естественно удобней итерационного. В принципе учитывать изменение размеров в упругой области не имеет смысла.

Объемная деформация \bar{e}_V , равная при малых деформациях сумме линейных деформаций, пропорциональна сумме нормальных напряжений [3]. Постулат справедлив для произвольно ориентированного элемента. В приведенном к главным для баллона направлениям, записывается следующим образом:

$$\bar{e}_V = \bar{e}_t + \bar{e}_z + \bar{e}_s = 3\bar{e}_o = \frac{\bar{\sigma}_o}{K} = \frac{\bar{\sigma}_t + \bar{\sigma}_z + 0}{3K}, \text{ где } K = \frac{E}{3(1-2\mu)} - \text{объемный модуль упругости, а } \bar{e}_o \text{ и } \bar{\sigma}_o \text{ средняя линейная упругая деформация, и средние напряжения. Подставляя сюда найденные выше линейные деформации и главные напряжения (для трубы и для баллона), получаем тождественное равенство. (Интересно отметить, что для баллона } \bar{\sigma}_o = \bar{\sigma}_z).$$

В компактном виде связь между деформированным и напряженным состоянием в упругой области, можно выразить в следующем: $\bar{e}_o = \frac{\bar{\sigma}_o}{3K}$, или, для баллона:

$$\bar{e}_t + \bar{e}_z + \bar{e}_s = \left(\bar{\sigma}_t + \bar{\sigma}_z \right) \frac{1-2\mu}{E}.$$

Вообще относительное упругое изменение некоего объема (объемная деформация), равно сумме главных деформаций только с точностью до величин второго порядка малости.

В итоге, для элемента цилиндрической части баллона: $\bar{e}_V = \frac{3r_o P}{s_o \bar{E}} \left(\frac{1}{2} - \mu \right)$, а для трубы:

$$\bar{e}_V = \frac{r_o P}{s_o \bar{E}} (1-2\mu), \text{ т.е. объем в обоих случаях упруго увеличивается.}$$

Упругое изменение объема обметаемого цилиндрической оболочкой с днищами можно выразить следующим образом:

$$\Delta W = \pi (r_o + u_r)^2 (l_o + u_z) - \pi r_o^2 l_o \approx 2\pi r_o l_o u_r + \pi r_o^2 u_z = \frac{\pi P l_o r_o^3}{2s_o \bar{E}} (5-4\mu), \text{ или}$$

$$\Delta W = W_o \frac{Pr_o}{2s_o \bar{E}} (5-4\mu) = W_o K \frac{Pr_o}{2s_o} = \frac{W_o K \bar{\sigma}_i}{\sqrt{3}}, \text{ где } K - \text{"К-фактор", (см. ниже), а } W_o = \pi r_o^2 l_o -$$

первоначальный объем закрытого цилиндра.

$$\text{Также можно представить } \Delta W = \frac{\pi P l_o r_o^3}{2s_o \bar{E}} (5-4\mu) = \frac{\pi l_o r_o^2 \bar{\sigma}_i}{\sqrt{3} \bar{E}} (5-4\mu) = \frac{W_o \bar{\sigma}_i}{\sqrt{3} \bar{E}} (5-4\mu).$$

Следует заметить, что упрощение $\Delta W = \frac{\pi P l_o r_o^3}{2 s_o \bar{E}} (5-4\mu)$ дает немного заниженный результат

по сравнению с точным расчетом, и по фактическим размерам, полученным итерационным способом. А если подставлять в это выражение измененные, конечные значения радиуса и толщины стенки, то результат, немного завышенный так же по сравнению с точным расчетом. Зависимость погрешности такая же, как и описано выше, и при упругом расчете ей также можно пренебрегать. Наиболее удачным является использование не обычных, а логарифмических деформаций, решение приведено в разделе 6 при описании деформационной теории пластичности.

Для толстостенных баллонов определяется такой параметр как "К-фактор":

$$K = \frac{\Delta W_{унр} (D_2^2 - D_1^2)}{P W_o D_2^2}, \text{ где } D_1, D_2 - \text{внутренний и наружный диаметр цилиндрической стенки}$$

баллона, $\Delta W_{унр}$ - упругое изменение объема определенное по водяной рубашке [4], W_o - внутренний объем баллона. "К-фактор" является упругой характеристикой группы однотипных баллонов, определяется экспериментально по специальной технологии, описанной в [5]. Используется при поверках баллонов и служит для ограничения напряжений в их цилиндрических стенках. Поскольку этот показатель определяется экспериментально, то естественно он включает в себя не только влияние неидеальной цилиндрической стенки, но и влияние днищ, которые могут иметь различные исполнения.

В идеальном представлении "К-фактор" выделенного участка, длиной l , далеко от днищ, из весьма длинной толстостенной цилиндрической трубы с днищами равен [5]: $(5-4\mu)/\bar{E}$.

Поскольку $D_2^2 - D_1^2 = (D_2^2 - D_1^2)(D_2^2 + D_1^2) = 2s_o 4r_o$ и $D_2 \approx 2r_o$, то для тонкостенного баллона

"К-фактор" можно представить следующим образом: $K = \frac{\Delta W 2s_o}{P W_o r_o} = \frac{\sqrt{3} \Delta W}{\bar{\sigma}_i W_o}$. В таком случае

для выделенного единичного участка тонкостенной трубы далеко от днищ "К-фактор" будет, таким, как и для толстостенной, а именно: $(5-4\mu)/\bar{E}$.

Для определения кольцевых деформаций через изменение объема, например при испытаниях в водяной рубашке, можно поступить следующим образом:

$$\Delta W \approx 2\pi r_o l_o u_r + \pi r_o^2 u_z = 2\pi r_o^2 l_o \bar{e}_t + \frac{\pi r_o^3 l_o P}{s_o \bar{E}} \left(\frac{1}{2} - \mu \right), \text{ отсюда}$$

$$\bar{e}_t = \frac{\Delta W - \frac{\pi r_o^3 l_o P}{s_o \bar{E}} \left(\frac{1}{2} - \mu \right)}{2\pi r_o^2 l_o} = \frac{\Delta W - \frac{W_o r_o P}{s_o \bar{E}} \left(\frac{1}{2} - \mu \right)}{2W_o} = \frac{\Delta W - \frac{W_o \bar{\sigma}_t}{\bar{E}} \left(\frac{1}{2} - \mu \right)}{2W_o} = \frac{\Delta W - \frac{W_o \bar{\sigma}_i}{\sqrt{3}\bar{E}} (1-2\mu)}{2W_o}.$$

Избавляясь от интенсивности напряжений получаем:

$$\bar{e}_t = \frac{\Delta W - \frac{\Delta W(1-2\mu)}{(5-4\mu)}}{2W_o} = \frac{\Delta W}{W_o} \left(\frac{2-\mu}{5-4\mu} \right).$$

Логика погрешности та же, только первоначальные размеры дают немного завышенный результат, а фактические - немного заниженный, и всем этим также можно пренебречь.

3. Действие внутреннего и наружного давлений.

Также продолжаем рассматривать упругий расчет по первоначальным геометрическим параметрам. Положим, что наружное давление, обозначим его как P_* , распределено только по цилиндрической части, оно может быть создано, например, установленным на цилиндрическую часть бандажом. А внутреннее, как и в баллоне - действует и на цилиндрическую часть и на днища. В случае установки бандаж полагаем, что в процессе нагружения внутренним давлением бандаж в осевом направлении следует за баллоном и не снижает осевых напряжений в его цилиндрической стенке, это полностью справедливо при намотке проволоки или ровинга перпендикулярно оси. Поскольку мы полагаем, что наружное давление никоим образом не действует на днища, следовательно, зависимости для осевых напряжений останутся прежними. Также предполагаем, что $P_* < P$ и $\sigma_r = 0$.

Далее, $\bar{\sigma}_t = \frac{(P-P_*)r_o}{s_o} = \frac{\Delta P r_o}{s_o}$. А поскольку $\bar{\sigma}_z = \frac{P r_o}{2s_o}$, то $\bar{\sigma}_t \neq 2\bar{\sigma}_z$. Далее,

$$\bar{\sigma}_i = \sqrt{\bar{\sigma}_t^2 - \bar{\sigma}_t \bar{\sigma}_z + \bar{\sigma}_z^2} = \frac{r_o}{2s_o} \sqrt{3P^2 - 6PP_* + 4P_*^2}$$

Также согласно закону Гука, в упругой области имеем:

$$\left. \begin{aligned} \bar{e}_t &= \frac{1}{E} (\bar{\sigma}_t - \mu \bar{\sigma}_z) = \frac{1}{E} \left(\frac{(P-P_*)r_o}{s_o} - \mu \frac{r_o P}{2s_o} \right) = \frac{r_o}{s_o E} \left(P \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) - P_* \right) \\ \bar{e}_z &= \frac{1}{E} (\bar{\sigma}_z - \mu \bar{\sigma}_t) = \frac{1}{E} \left(\frac{r_o P}{2s_o} - \frac{\mu (P-P_*)r_o}{s_o} \right) = \frac{r_o}{s_o E} \left(P \left(\frac{1}{2} - \mu \right) + \mu P_* \right) \\ \bar{e}_s &= \frac{1}{E} (\bar{\sigma}_r - \mu (\bar{\sigma}_t + \bar{\sigma}_z)) = -\frac{\mu}{E} (\bar{\sigma}_t + \bar{\sigma}_z) = -\frac{\mu r_o}{E s_o} \left(\frac{3P}{2} - P_* \right) \end{aligned} \right\}.$$

Зависимость: $\bar{e}_t = \frac{u}{r_o}$, не утрачивает силу, а интенсивность деформаций определяется по стандартной формуле.

4. О кольцевых напряжениях в упругой области.

В случае представления трубы как толстостенной, с внутренним и наружным радиусами r_1, r_2 , на которую действует внутреннее давление P_1 , кольцевые напряжения будут функцией радиуса r , ($r_1 \leq r \leq r_2$), и определяться в упругой области по одной из формул Ляме. Эти напряжения на внутренней поверхности выше, чем на наружной, и наличие, либо отсутствие днищ, на них не влияет. Как можно показать, площадь эпюры кольцевых

напряжений по толщине стенки s равна $\int_{r_1}^{r_2} \bar{\sigma}_t dr = P_1 r_1$. Отсюда среднее интегральное значение

напряжений составит $\langle \bar{\sigma}_t \rangle = \frac{P_1 r_1}{s_0}$. В тонкостенном представлении, относя внутреннее давление к срединному радиусу r_0 , предварительно умножая его на коэффициент r_1/r_0 ,

получаем напряжения равные средним: $\bar{\sigma}_t = \frac{\left(P_1 \left(\frac{r_1}{r_0} \right) \right) r_0}{s_0} = \frac{P_1 r_1}{s_0} = \langle \bar{\sigma}_t \rangle$.

В случае действия только наружного давления P_2 , кольцевые напряжения отрицательны, и не зависят от наличия днищ, напряжения на внутренней поверхности по модулю также

выше, чем на наружной. Далее имеем: $-\int_{r_1}^{r_2} \bar{\sigma}_t dr = P_2 r_2$, и аналогично, коэффициент равен

r_2/r_0 . Все сказанное справедливо и при одновременном действии внутреннего и наружного

давлений: $\int_{r_1}^{r_2} \bar{\sigma}_t dr = P_1 r_1 - P_2 r_2$, $\langle \bar{\sigma}_t \rangle = \frac{P_1 r_1 - P_2 r_2}{s_0}$.

Указанные коэффициенты справедливы только для геометрической интерпретации кольцевых напряжений, при определении же деформаций их лучше не использовать, нет ожидаемого увеличения точности. Для точного расчета стоило бы использовать толстостенную теорию.

Но при использовании внутреннего радиуса при определении напряжений, мы получаем средние значения, которые меньше максимальных на внутренней поверхности. При

определении напряжений через наружный радиус: $\bar{\sigma}_t = \frac{P r_2}{s}$, мы получаем значения

немногим больше, чем максимальные на внутренней поверхности цилиндрической оболочки, т.е. идем в запас. Но, интенсивность напряжений, определяемая по формуле

$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\bar{\sigma}_t - \bar{\sigma}_z)^2 + \bar{\sigma}_t^2 + \bar{\sigma}_z^2}$, где $\bar{\sigma}_z = \bar{\sigma}_t/2$, тем не менее, оказывается меньше, чем

фактическое значение на внутренней поверхности, независимо от того это труба с днищами без днищ или с осевым подпором. Это получается в силу того, что осевые напряжения немногим больше чем фактические, и не учитываются радиальные напряжения, поскольку

они принимаются равными нулю. При оперировании внутренним радиусом интенсивность напряжений получается еще меньше.

5. Расчет в пластической области.

При больших деформациях за пределами упругости точнее пользоваться понятием логарифмической деформации, иногда ее еще называют действительная, которую легко можно выразить через обычную, либо же через текущий и первоначальный размеры. Например, при одноосном растяжении стержня имеем:

$$\varepsilon = \int_{l_0}^l d\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln l - \ln l_0 = \ln \frac{l}{l_0} = \ln \frac{l_0 + \Delta l}{l_0} = \ln(1 + \bar{\varepsilon});$$

- логарифмическая деформация стержня.

где: l_0 - длина стержня до деформации, Δl - конечное удлинение, l - текущая длина стержня, dl - бесконечно малое ее изменение и $d\varepsilon = dl/l$ - приращение деформации.

Отсюда обычную деформацию можно выразить через логарифмическую следующим образом: $\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta l}{l_0} = e^\varepsilon - 1$.

При малых деформациях различие между логарифмической деформацией и обычной незначительное. Логарифмическая деформация всегда меньше обычной, например, при $\bar{\varepsilon} = 10\% \Rightarrow \varepsilon = 9,531\%$ т.е. меньше обычной на 4,69%, при $\bar{\varepsilon} = 5\%$, на 2,42%.

Далее будем пользоваться понятием логарифмической деформации ε , т.к. ей удобней оперировать с математической точки зрения - исчезают дополнительные члены, которые неудобны в преобразованиях и она более приближена к действительности, чем обычная $\bar{\varepsilon}$. При малых деформациях обычные и логарифмические деформации можно не различать. При механическом испытании образца на одноосное растяжение, получают диаграмму растяжения $\bar{\varepsilon}, \bar{\sigma}$, где $\bar{\varepsilon}$ - обычная продольная деформация, как удлинение некоторой базы выделенной в продольном направлении образца, отнесенное к длине этой базы, а $\bar{\sigma}$ - напряжение, как растягивающее усилие F , действующее на образец, отнесенное к первоначальной площади его рабочего поперечного сечения A_0 , т.е. $\bar{\varepsilon} = \Delta l / l_0$, $\bar{\sigma} = F / A_0$. Эту диаграмму будем перестраивать в действительную диаграмму деформирования ε_i, σ_i по следующим зависимостям: $\varepsilon_i = \ln(1 + \bar{\varepsilon})$, $\sigma_i = \bar{\sigma}(1 + \bar{\varepsilon})$, тогда ею можно пользоваться и при многоосном напряженном состоянии, но только до момента образования шейки [6]. Следует заметить, что при таком построении действительной диаграммы деформирования мы пренебрегаем упругими деформациями объема занятым материалом. Теорема же об упругой разгрузке сохраняет свою силу. Действительная диаграмма деформирования ε_i, σ_i является свойством материала и не зависит от типа напряженного состояния. Это положение является первым положением теорий пластичности.

Вторым положением теории пластичности является условие, что изменение объема $\varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ остается чисто упругим. Так, пластические деформации, как правило, заметно больше упругих, а ε_V является величиной того же порядка, что и упругие деформации, то изменение объема незначительное. В принципе при выводе формул, связывающих компоненты напряжений и деформаций в пластической зоне, можно пренебрегать

изменением объема и принимают $\mu=0,5$, но в таком случае, при малых деформациях решения не сходятся к упругому. Да, в реальности, как будет показано ниже, коэффициент Пуассона с ростом пластических деформаций стремится к 0,5, и ничто не запрещает его в пластической области таким и принимать, но прелесть теорий пластичности заключается в том, что решения, полученные по ним, при малых деформациях переходят в упругие решения.

В обобщенном виде, при сложном напряженно-деформированном состоянии закона Гука для упругого состояния выглядит следующим образом: $\sigma_i = E \varepsilon_i$, т.е. аналогично закону Гука в пределах упругих деформаций при одноосном растяжении $\bar{\sigma} = \bar{E} \bar{\varepsilon}$.

Если модуль упругости по диаграмме растяжения обозначить как $\bar{E} = \bar{\sigma} / \bar{\varepsilon}$, то на действительной диаграмме деформирования должно быть: $E = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} = \frac{\bar{\sigma}(1+\bar{\varepsilon})}{\bar{\varepsilon} \ln(1+\bar{\varepsilon})} = \bar{E} \frac{\bar{\varepsilon}(1+\bar{\varepsilon})}{\ln(1+\bar{\varepsilon})}$.

Коэффициент перехода от \bar{E} к E для упругих деформаций практически равен единице, например при $\bar{\varepsilon}=0,003$ что соответствует $\bar{\sigma}=600$ МПа для $\bar{E}=2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент $\frac{\bar{\varepsilon}(1+\bar{\varepsilon})}{\ln(1+\bar{\varepsilon})} = 1,0045$, поэтому можно принимать $\bar{E} = E$ и не различать их между собой. Также можно не различать и условный предел текучести.

Рассмотрим деформирование тонкостенного баллона за пределами упругости по нескольким теориям пластичности, а именно по деформационной теории пластичности и теории пластического течения, описанными в [7, 8]. Наряду с указанными существуют и еще теории пластичности, например теория скольжения, но тонкостенный баллон по ней не решается.

Для любой теории пластической деформации баллона под воздействием внутреннего давления, главные напряжения в цилиндрической стенке - кольцевое, осевое и радиальное, выражаются следующим образом.

$$\sigma_t = \frac{Pr}{s}, \sigma_z = \frac{\sigma_t}{2} = \frac{Pr}{2s}, \sigma_r = 0, \sigma_t > \sigma_z > \sigma_r.$$

Форма записи такая же, как и для базового упругого расчета, но здесь берутся уже текущие (под нагрузкой) геометрические параметры баллона т.к. деформации за пределами упругости не являются малыми. Процесс нагружения не только при малых, но и при больших деформациях является простым.

Интенсивность напряжений берется как эквивалентное напряжение по 4-й теории прочности, (гипотезе удельной потенциальной энергии изменения формы):

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_t - \sigma_z)^2 + (\sigma_z)^2 + (\sigma_t)^2} = \sqrt{\sigma_t^2 - \sigma_t \sigma_z + \sigma_z^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_t = \frac{\sqrt{3} Pr}{2s}.$$

Отсюда также имеем: $\sigma_t + \sigma_z = \sqrt{3} \sigma_i$, и $\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sigma_t \approx 0,866 \cdot \sigma_t$. Т.е. в пластической области, так как и в упругой, интенсивность напряжений пропорциональна своим составляющим, и эти составляющие между собой также пропорциональны.

Если, например, использовать 3-ю теорию прочности, (гипотезу наибольших касательных напряжений), то эквивалентное напряжение равнялось бы разности максимального и минимального главных напряжений т.е.: $\sigma_t - \sigma_r = \sigma_t - 0 = \sigma_t$.

По гипотезе энергии формоизменения переход из упругого состояния в пластическое происходит тогда, когда интенсивность напряжений σ_i достигает предела текучести σ_T . Здесь σ_T - принимаемый предел текучести. В классических теориях пластичности не делали различий между пределом текучести и условным пределом текучести, а также не вводили предела пропорциональности.

Линейные деформации, соответствующие главным напряжениям тоже главные. Деформации же определяемые по каждой теории различаются. Выражения для определения интенсивности деформаций такие же, как и для случая упругого деформирования. Таким же образом определяют и интенсивность приращения деформаций.

При построении деформационной теории пластичности и теории пластического течения в уравнениях остаются модуль упругости и коэффициент Пуассона в упругой области, которые позволяют из зависимостей, полученных для пластического состояния, при незначительных деформациях получить упругие решения. При пластических же деформациях упругая составляющая в уравнениях мала не только по отношению к пластической составляющей, но и по отношению к чисто упругому решению. Фактический же коэффициент Пуассона в области пластического деформирования равен 0,5. В условиях разгрузки действуют только уравнения упругости.

Угловые деформации главных площадок вследствие отсутствия на них касательных напряжений равны нулю.

Для трубы соответственно: $\sigma_i = \sigma_t$.

6. Деформационная теория пластичности, (Теория малых упруго-пластических деформаций).

Главные оси напряженного состояния при изменении внешних сил сохраняют свое направление. Напряжения между собой пропорциональны и возрастают пропорционально некоторому параметру, например давлению. Такой вид деформации носит название простой деформации, а нагружение - простого нагружения. В случае простого нагружения интенсивность приращения пластических деформаций равна приращению интенсивности пластических деформаций. Это же касается и одноосного растяжения образца.

В деформационной теории принимается, что зависимость средней линейной деформации от среднего нормального напряжения такая же, как и в пределах упругости, т.е. $\varepsilon_o = \sigma_o / 3K$, т.е. объем изменяется чисто упруго. Подставляя сюда найденные ниже линейные деформации и главные напряжения, также как и в упругом расчете получаем тождественное равенство. (Здесь естественно тоже средние напряжения равны осевым). Также понятно, что в силу определения средних линейных деформаций, которые являются упругими $\varepsilon_o < \ln(1 + \bar{\varepsilon}_o)$, ($\neq!$).

Деформации вдоль главного направления 1 можно представить следующим образом [7]:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)) + \left(\frac{1}{E_C} - \frac{1}{E}\right)(\sigma_1 - 0,5(\sigma_2 + \sigma_3)),$$

где, $E_C = \sigma_i / \varepsilon_i$ секущий модуль по единой кривой σ_i, ε_i , (переменная величина).

Секущий модуль лучше выразить как функцию интенсивности напряжений: $E_C = E_C(\sigma_i)$.

Зависимость $\sigma_i = E_C \varepsilon_i$ аналогична закону Гука, а при упругих деформациях полностью в него переходит. Секущий модуль в упругой области равен обычному, т.е. E , а с ростом пластических деформаций уменьшается практически на два порядка.

Для одноосного растяжения образца, например, получаем: $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} + \left(\frac{1}{E_C} - \frac{1}{E}\right)\sigma_1 = \frac{\sigma_1}{E_C}$.

$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{\sigma_1}{2} \left(\frac{1-2\mu}{E} - \frac{1}{E_C}\right)$, и $\varepsilon_V = \frac{\sigma_1(1-2\mu)}{E}$. Получаем такое же выражение, как и при базовом

упругом расчете, но по текущим размерам, т.е. объем, изменяется упруго. Индексом 1 указано направление растяжения, а - 2 и 3 поперечные направления. Подставляя компоненты

в формулу интенсивности деформаций имеем $\varepsilon_i = \frac{\sigma_1}{E_C} - \frac{\sigma_1(1-2\mu)}{3E}$. Отсюда в упругой области

$\varepsilon_i = \frac{2\sigma_1(1+\mu)}{3E}$, а при $\mu=0,5$ имеем $\varepsilon_i = \frac{\sigma_1}{E_C}$. В упругой области при $\mu=0,5$ имеем $\varepsilon_i = \frac{\sigma_1}{E}$.

Остаточные деформации, при сбросе нагрузки растягивающей образец, не зависят от коэффициента Пуассона:

$$\varepsilon_{iост} = \left(\frac{\sigma_1}{E_C} - \frac{\sigma_1(1-2\mu)}{3E}\right) - \left(\frac{2\sigma_1(1+\mu)}{3E}\right) = \sigma_1 \left(\frac{1}{E_C} - \frac{1}{E}\right).$$

$\bar{E}_C = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\varepsilon}}$, $E_C = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} = \frac{\bar{\sigma}(1+\bar{\varepsilon})}{\ln(1+\bar{\varepsilon})} = \bar{E}_C \frac{\bar{\varepsilon}(1+\bar{\varepsilon})}{\ln(1+\bar{\varepsilon})}$. Например, при $\bar{\varepsilon}=0,1$, коэффициент $\frac{\bar{\varepsilon}(1+\bar{\varepsilon})}{\ln(1+\bar{\varepsilon})} = 1,154$, а

при $\bar{\varepsilon}=0,2$, что для стали 20 соответствует уже практически началу образования шейки, он равен 1,316. Следует заметить, что функции $E_C = E_C(\sigma_i)$ и $\bar{E}_C = \bar{E}_C(\bar{\sigma})$ на начальных стадиях пластического деформирования практически равны.

Главные деформации баллона выражаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_z) + \left(\frac{1}{E_C} - \frac{1}{E}\right)(\sigma_t - 0,5\sigma_z) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_t) + \left(\frac{1}{E_C} - \frac{1}{E}\right)(\sigma_z - 0,5\sigma_t) \\ \varepsilon_s &= -\frac{\mu}{E}(\sigma_t + \sigma_z) - \left(\frac{1}{E_C} - \frac{1}{E}\right)\frac{(\sigma_t + \sigma_z)}{2} \end{aligned} \right\}.$$

Раскрывая скобки в первом выражении и группируя подобные можно получить:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_z) - \frac{1}{E}(\sigma_t - 0,5\sigma_z) + \frac{1}{E_C}(\sigma_t - 0,5\sigma_z) = \frac{1}{E}((0,5 - \mu)\sigma_z) + \frac{1}{E_C}(\sigma_t - 0,5\sigma_z).$$

Расписывая напряжения, либо выражая их через интенсивность, также получаем:

$$\varepsilon_t = \frac{Pr}{4s} \left(\frac{1-2\mu}{E} + \frac{3}{E_C} \right) = \frac{\sigma_t}{4} \left(\frac{1-2\mu}{E} + \frac{3}{E_C} \right) = \frac{\sigma_i}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1-2\mu}{E} + \frac{3}{E_C} \right).$$

При $\mu=0,3$, следует $\varepsilon_t \approx 0,115 \frac{\sigma_i}{E} + 0,866 \frac{\sigma_i}{E_C}$. Сумма коэффициентов равна 0,981. При $\mu=0,5$,

$$\varepsilon_t = \frac{\sqrt{3}\sigma_i}{2E_C} = 0,866 \frac{\sigma_i}{E_C}. \text{ При упругом расчете: } \varepsilon_t = \frac{\sigma_i(2-\mu)}{\sqrt{3}E}.$$

Следует заметить, что если в выражении находится модуль упругости, или тоже самое, $\mu \neq 0,5$, то секущий модуль не стоит расписывать как σ_i/ε_i , поскольку в отличие от интенсивности напряжений, интенсивности деформаций для баллона и по действительной диаграмме деформирования разные. Также самое касается и касательного модуля, рассматриваемого в теории пластического течения. При $\mu=0,5$ интенсивность деформаций для баллона, совпадает с интенсивностью деформаций по действительной диаграмме деформирования, поэтому в таком случае, секущий модуль можно расписывать и проводить дальнейшие преобразования с величинами.

$$\text{Аналогично: } \varepsilon_z = \frac{Pr}{Es} \left(\frac{1}{2} - \mu \right) = \frac{2\sigma_i}{\sqrt{3}E} \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \text{ и } \varepsilon_s = \frac{3Pr}{4s} \left(\frac{1-2\mu}{E} - \frac{1}{E_C} \right) = \frac{\sqrt{3}\sigma_i}{2} \left(\frac{1-2\mu}{E} - \frac{1}{E_C} \right).$$

Формула для осевых деформаций такая же, как и при базовом упругом расчете, но по текущим размерам. Ранжирование деформаций такое же, как и в упругой зоне $\varepsilon_t > \varepsilon_z > \varepsilon_s$.

Не учитывая изменение размеров можно сопоставить между собой коэффициенты при модуле упругости и по ним оценить степень вложения этого модуля в пластическое решение.

Таблица. Коэффициенты при модуле упругости.

	$\mu=0,3$	$\mu=0,5$		$\mu=0,3$	$\mu=0,5$		$\mu=0,3$	$\mu=0,5$
a			б				a+б	
$\bar{\varepsilon}_t \Big : 1 - \frac{\mu}{2}$	0,85	0,75	$\bar{\varepsilon}_s \Big : -\frac{3\mu}{2}$	-0,45	-0,75		0,4	0
$\varepsilon_t \Big : \frac{1-2\mu}{4}$	0,1	0	$\varepsilon_s \Big : \frac{3-6\mu}{4}$	0,3	0		0,4	0
$(\bar{\varepsilon}_t \Big) - (\varepsilon_t \Big)$	0,75	0,75		-0,75	-0,75		0	0

Влияние модуля упругости зависит от коэффициента Пуассона, например для кольцевых деформаций, при $\mu=0,3$, степень его вложения в $0,85/0,1=8,5$ раза меньше чем для чисто упругого решения. А при $\mu=0,5$ вообще прекращается. Для деформаций же толщины стенки эта степень вообще отрицательна и служит как бы только для балансировки

Можно сделать вывод, что при пластическом решении модуль упругости не играет практически, никакой роли, а служит только для того, чтобы при малых деформациях, когда секущий модуль перейдет в упругий, пластическое решение переходило в упругое.

Расписывая интенсивность деформаций по определению, имеем:

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{3} \left(\frac{2\mu-1}{E} + \frac{3}{E_C} \right). \text{ Отсюда } \varepsilon_t = \frac{\varepsilon_i \sqrt{3} \left(\frac{1-2\mu}{E} + \frac{3}{E_C} \right)}{2 \left(\frac{2\mu-1}{E} + \frac{3}{E_C} \right)}.$$

При $\mu=0,3$, следует $\varepsilon_i \approx -0,133 \frac{\sigma_i}{E} + \frac{\sigma_i}{E_C}$. А для упругой области: $\varepsilon_i = \frac{2\sigma_i(1+\mu)}{3E} = \varepsilon_t \frac{(1+\mu)}{\sqrt{3} \left(1 - \frac{\mu}{2} \right)}$, а

при $\mu=0,3$ $\varepsilon_i = 0,866 \frac{\sigma_i}{E}$. Разность коэффициентов при σ_i/E равна 1. При $\mu=0,5$ из общего

выражения получаем $\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E_C} = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_t$.

Интересно отметить, что для баллона $\varepsilon_t - \varepsilon_s = \sqrt{3} \varepsilon_i$, $\varepsilon_t + \varepsilon_s = \frac{2\sigma_i}{\sqrt{3}E} (1-2\mu)$, т.е. как и в базовом упругом расчете.

Отвлеченно представим сброс внутреннего давления, после некоторых пластических деформаций. Сброс естественно происходит упруго. Имеем.

$$\varepsilon_{iост} = \left(\frac{\sigma_i}{3} \left(\frac{2\mu-1}{E} + \frac{3}{E_C} \right) \right) - \left(\frac{2\sigma_i(1+\mu)}{3E} \right) = \sigma_i \left(\frac{1}{E_C} - \frac{1}{E} \right). \text{ Видно, что это выражение, как и}$$

нижеследующие, не зависит от коэффициента Пуассона. Также видно, что оно полностью совпадает с параметром Удквиста - остаточные деформации по действительной диаграмме деформирования. Т.е. здесь остаточные деформации в баллоне уже совпадают с остаточными деформациями по действительной диаграмме деформирования. Аналогично:

$\varepsilon_{tост} = \left(\frac{\sigma_i}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1-2\mu}{E} + \frac{3}{E_C} \right) \right) - \left(\frac{\sigma_i(2-\mu)}{\sqrt{3}E} \right) = \frac{\sqrt{3}\sigma_i}{2} \left(\frac{1}{E_C} - \frac{1}{E} \right)$. Видно, что $\varepsilon_{tост} = \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_{iост}$. Также получаем $\varepsilon_{sост} = -\varepsilon_{tост}$. И понятно что $\varepsilon_{zост} = 0$.

Выражение $\varepsilon_{iост} = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_{tост}$, также получается подстановкой компонентов деформаций в формулу интенсивности деформаций. Также видно, что разность $\varepsilon_{tост} - \varepsilon_{sост} = \sqrt{3} \varepsilon_{iост}$, а сумма нулю. Остаточные деформации не зависят от коэффициента Пуассона.

Для случая простого нагружения интенсивность деформаций можно расписать как сумму упругой и пластической составляющих $\varepsilon_i = \varepsilon_i^y + \varepsilon_i^p$, или $\varepsilon_i = \frac{2\sigma_i(1+\mu)}{3E} + \sigma_i \left(\frac{1}{E_C} - \frac{1}{E} \right)$.

ε_i^y можно понимать как величину упругой разгрузки в каждой точке. Чем больше деформация, тем больше напряжения и тем большей будет величина упругой разгрузки. Для случая пластического деформирования цилиндрической стенки тонкостенного баллона, поскольку нагружение является простым, то $d\varepsilon_i = d\varepsilon_i^y + d\varepsilon_i^p$. Т.е.

$$d\varepsilon_i = \frac{2(1+\mu)}{3E} d\sigma_i + \left(\frac{1}{E_C} - \frac{1}{E} \right) d\sigma_i - \sigma_i \frac{dE_C}{E_C^2}.$$

$$\text{Отметим: } d\varepsilon_i^p = \left(\frac{1}{E_C} - \frac{1}{E} \right) d\sigma_i - \sigma_i \frac{dE_C}{E_C^2}.$$

В пластической области в отличие от упругой, интенсивность деформаций не пропорциональна интенсивности напряжений. Также интенсивность деформаций не пропорциональна каждой из линейных деформаций. При $\mu=0,5$ интенсивность деформаций становится пропорциональной линейным деформациям за исключением осевых, которые получают равными нулю.

Изменение некоего объема, выделенного из цилиндрической части оболочки с днищами составит: $\bar{\varepsilon}_V = \frac{3rP}{sE} \left(\frac{1}{2} - \mu \right)$, т.е. такое же выражение, как и при базовом упругом расчете, но по текущим размерам, т.е. объем изменяется чисто упруго. Это же касается и выражения $\varepsilon_t + \varepsilon_s$.

Для трубы соответственно имеем:

$$\varepsilon_t = \frac{Pr}{sE_C} = \frac{\sigma_t}{E_C}, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_s = \frac{Pr}{2s} \left(\frac{1-2\mu}{E} - \frac{1}{E_C} \right) = \frac{\sigma_t}{2} \left(\frac{1-2\mu}{E} - \frac{1}{E_C} \right), \quad \varepsilon_i = \frac{\sigma_t}{3} \left(\frac{3}{E_C} - \frac{1-2\mu}{E} \right). \quad (\sigma_i = \sigma_t).$$

Изменение объема такое же, как и при упругом расчете, но по текущим размерам:

$$\bar{\varepsilon}_V = \frac{rP}{sE} (1-2\mu) = \frac{\sigma_t}{E} (1-2\mu).$$

Из приведенного видно, что для баллона и трубы, связь между интенсивностями напряжений и деформаций в пределах упругости: $\sigma_i = 3G\varepsilon_i$. Здесь для изотропного материала

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \text{ Т.е. по форме записи такая же, как и в базовом упругом расчете.}$$

Для баллона:

$$\text{По измененным размерам } \Delta W \approx 2\pi r l u_r + \pi r^2 u_z = \frac{\pi l r^3 P}{s} \left(\frac{1-2\mu}{E} + \frac{3}{2E_C} \right) = \frac{\pi l r^2 \sigma_i}{\sqrt{3}} \left(\frac{2-4\mu}{E} + \frac{3}{E_C} \right).$$

$$\text{По первоначальным размерам } \Delta W \approx \frac{W_o \sigma_i}{\sqrt{3}} \left(\frac{2-4\mu}{E} + \frac{3}{E_C} \right), \text{ а при } \mu=0,5, \Delta W \approx \frac{W_o \sqrt{3} \sigma_i}{E_C}.$$

В логарифмических деформациях, имея $r=r_o e^{\varepsilon_t}$, $l=l_o e^{\varepsilon_z}$, при точном решении получим:

$$\begin{aligned} \Delta W &= \pi r^2 l - \pi r_o^2 l_o = \pi r_o^2 l_o \left(e^{2\varepsilon_t + \varepsilon_z} - 1 \right) = W_o \left(\exp \left(\frac{\sigma_i}{\sqrt{3}} \left(\frac{2-4\mu}{E} + \frac{3}{E_C} \right) \right) - 1 \right) = \\ &= W_o \left(\exp \left(\sqrt{3} \varepsilon_i \frac{\frac{2-4\mu}{E} + \frac{3}{E_C}}{\frac{2\mu-1}{E} + \frac{3}{E_C}} \right) - 1 \right) = W_o \left(\exp \left(2\varepsilon_t \frac{\frac{2-4\mu}{E} + \frac{3}{E_C}}{\frac{1-2\mu}{E} + \frac{3}{E_C}} \right) - 1 \right), \end{aligned} \text{ это общее}$$

решение, где $W_o = \pi r_o^2 l_o$, а ε_i определяется по формуле, а не по действительной диаграмме деформирования.

В упругой области имеем:

$$\Delta W = W_o \left(\exp \left(\frac{\sigma_i (5-4\mu)}{\sqrt{3}E} \right) - 1 \right) = W_o \left(\exp \left(\frac{\varepsilon_i \sqrt{3} (5-4\mu)}{2(1+\mu)} \right) - 1 \right) = W_o \left(\exp \left(\frac{\varepsilon_t (5-4\mu)}{2-\mu} \right) - 1 \right).$$

$$\text{А также } W_o + \Delta W = W_o \exp \left(\frac{\sigma_i (5-4\mu)}{\sqrt{3}E} \right), \text{ и } \frac{\Delta W}{W_o + \Delta W} = 1 - \exp \left(\frac{-\sigma_i (5-4\mu)}{\sqrt{3}E} \right).$$

Примечательно то, что выше для упругого расчета было получено выражение для изменения объема при обычных деформациях, и напряжениях по первоначальным размерам:

$$\Delta W = \pi r_o^2 l_o \frac{\bar{\sigma}_i (5-4\mu)}{\sqrt{3}E}.$$

При $\mu=0,5$ из общего решения следует:

$$\Delta W = W_o \left(\exp \left(\frac{\sqrt{3} \sigma_i}{E_C} \right) - 1 \right) = W_o \left(\exp(\sqrt{3} \varepsilon_i) - 1 \right) = W_o \left(\exp(2\varepsilon_t) - 1 \right).$$

Раскладывая полное изменение объема под нагрузкой на упругую (сбрасываемую после разгрузки) и пластическую составляющие имеем $\Delta W = \Delta W_y + \Delta W_p$. Отсюда $\Delta W_p = \Delta W - \Delta W_y$.

Здесь ΔW_y определяется по зависимостям для упругой области. Естественно, что с ростом пластических деформаций эта характеристика, как собственно и ΔW , и ΔW_p увеличивается, но в меньшей степени, чем последние. Пластическая составляющая изменения объема связана с остаточными деформациями.

$$\text{Упругая составляющая равна: } \Delta W_y = W_o \left(\exp \left(\frac{\sigma_i (5-4\mu)}{\sqrt{3}E} \right) - 1 \right).$$

Представляя остаточное изменение объема, т.е. то изменение объема по отношению к первоначальному после сброса внутреннего давления как $\Delta W_p = \Delta W - \Delta W_y$, можно заметить, что оно от коэффициента Пуассона практически не зависит. Т.е. при расчете с коэффициентом Пуассона равным 0,3 или принимая его равным 0,5, значения ΔW_p практически совпадают, (погрешность в районе 0,1 %). Но при этом стоит заметить, что составляющие разность значения ΔW и ΔW_y при $\mu \neq 0,5$ и $\mu = 0,5$ между собой могут существенно различаться. Что же касается остаточных деформаций и их интенсивности, то там полное совпадение, а составляющие разностей при $\mu \neq 0,5$ и $\mu = 0,5$ также между собой могут существенно отличаться.

При определении остаточного изменения объема можно поступить проще. Поскольку нам известны остаточные кольцевые деформации, которые также можно выразить и через остаточную интенсивность деформаций, и при этом мы знаем, что осевые остаточные деформации равны нулю, имеем.

$$\Delta W_{ост} = W_o \left(\exp(2\varepsilon_{iост}) - 1 \right) = W_o \left(\exp(\sqrt{3}\varepsilon_{iост}) - 1 \right), \text{ или}$$

$$\Delta W_{ост} = W_o \left(\exp \left(\sqrt{3}\sigma_i \left(\frac{1}{E_C} - \frac{1}{E} \right) \right) - 1 \right).$$

Понятно, что значение σ_i соответствует значению интенсивности напряжений во время нагрузки, поскольку при полном сбросе давления, эти напряжения равны нулю.

Значение $\Delta W_{ост}$ практически полностью совпадает с ΔW_p находимым как разность.

Функции:

$$1. \exp \left(\sqrt{3}\sigma_i \left(\frac{1}{E_C} - \frac{1}{E} \right) \right) - 1, \text{ получаемая из остаточных деформаций;}$$

$$2. \exp \left(\frac{\sqrt{3}\sigma_i}{E_C} \right) - \exp \left(\frac{\sqrt{3}\sigma_i}{E} \right), \text{ получаемая из разности, при } \mu = 0,5;$$

$$3. \exp \left(\frac{\sigma_i}{\sqrt{3}} \left(\frac{2-4\mu}{E} + \frac{3}{E_C} \right) \right) - \exp \left(\frac{\sigma_i (5-4\mu)}{\sqrt{3}E} \right), \text{ получаемая из разности, при } \mu \neq 0,5;$$

приводят практически к одному результату.

Зная изменения объема, например, при испытаниях в водяной рубашке, можно найти кольцевые деформации:

$$\varepsilon_t = \frac{\frac{1-2\mu}{E} + \frac{3}{E_C}}{2 \left(\frac{2-4\mu}{E} + \frac{3}{E_C} \right)} \ln \left(\frac{\Delta W}{W_o} + 1 \right), \text{ где } W_o = \pi r_o^2 l_o.$$

$$\varepsilon_t = \frac{2-\mu}{5-4\mu} \ln \left(\frac{\Delta W}{W_o} + 1 \right) - \text{ для упругой области.}$$

При $\mu=0,5$ следует $\varepsilon_t = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\Delta W}{W_o} + 1 \right) = \ln \sqrt{\frac{\Delta W}{W_o} + 1}$. И поскольку $\varepsilon = \ln(1+\bar{e})$, то

$$\bar{e}_t = e^{\varepsilon_t} - 1 = \sqrt{\frac{\Delta W}{W_o} + 1} - 1, \text{ т.е. мы приходим к формуле В. Киричка: } \bar{e}_t = \sqrt{\frac{\Delta W}{W_o} + 1} - 1.$$

В. Киричком было получено простое решение, вытекающее чисто из геометрических соображений. Выкладка приведена ниже.

Поскольку обычная кольцевая деформация $\bar{e}_t = \frac{\Delta r}{r_o}$, то $\Delta r = \bar{e}_t r_o$. Расписывая деформацию объема,

имеем: $\frac{\Delta W}{W_o} = \frac{\pi(r_o + \bar{e}_t r_o)^2 - \pi r_o^2}{\pi r_o^2} = \bar{e}_t^2 + 2\bar{e}_t$. Решая квадратное уравнение $\bar{e}_t^2 + 2\bar{e}_t - \frac{\Delta W}{W_o} = 0$, находим

его корни $\bar{e}_t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \frac{\Delta W}{W_o}}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{\Delta W}{W_o}}$. Беря положительный корень, поскольку деформация не

может быть отрицательна, имеем $\bar{e}_t = \sqrt{\frac{\Delta W}{W_o} + 1} - 1$, (!)

Приравнивая в уравнениях деформационной теории пластичности для баллона, коэффициент Пуассона к 0,5, получаем следующие выкладки.

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E_C}, \quad \varepsilon_t = \frac{\sqrt{3}\sigma_i}{2E_C} = \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_i \approx 0,866 \frac{\sigma_i}{E_C}, \quad \varepsilon_z = 0, \quad \varepsilon_s = -\frac{\sqrt{3}\sigma_i}{2E_C} = -\varepsilon_t \text{ и}$$

$$\Delta W = \frac{\sqrt{3}\pi l r^2 \sigma_i}{E_C} = \sqrt{3}\pi l r^2 \varepsilon_i = \pi l_o r^2 \sqrt{3}\varepsilon_i = W_o \sqrt{3}\varepsilon_i \exp(\sqrt{3}\varepsilon_i).$$

Из точного решения имеем: $\Delta W = W_o \left(\exp \left(\frac{\sqrt{3}\sigma_i}{E_C} \right) - 1 \right) = W_o \left(\exp(\sqrt{3}\varepsilon_i) - 1 \right)$.

Принимая сразу отсутствие осевых деформаций, даже упругих, имеем в итоге тоже самое:

$$\Delta W = \pi r^2 l_o - \pi r_o^2 l_o = \pi l_o (r^2 - r_o^2) = W_o \left(\exp(\sqrt{3}\varepsilon_i) - 1 \right).$$

Также понятно, что $\sqrt{3}\varepsilon_i \exp(\sqrt{3}\varepsilon_i) > (\exp(\sqrt{3}\varepsilon_i) - 1) > \sqrt{3}\varepsilon_i$. Естественно, что с ростом деформации отношение между элементами увеличивается от единицы. Например, при $\varepsilon_i = 0,2$ отношение первого ко второму = 1,183, а второго к третьему 1,195 соответственно.

Поскольку при теоретическом определении "К-фактора" используется расчетное изменение объема, то понятно, что точное расчетное значение этого показателя будет отличаться от приведенного в упругом расчете. Для выделенного участка, длиной 1, далеко от днщ, из весьма длинной тонкостенной цилиндрической трубы с днщами он уже не будет константой в отличие от рассмотренного в упругом расчете. С ростом напряжений он будет незначительно расти от значения $(5-4\mu)/E$ практически пропорционально напряжениям. Также понятно, что после пластических деформаций заново рассчитанный для идеального случая "К-фактор" не будет отличаться от первоначального и также будет равняться значению $(5-4\mu)/E$.

Согласно положениям, приведенным в [8], уравнение в координатной форме для кольцевой деформации представится в следующем виде: $\varepsilon_t = \varepsilon_o + \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}(\sigma_t - \sigma_o)$, где σ_o - среднее напряжение или тоже самое элемент шарового тензора, ε_o - средняя линейная упругая деформация.

С учетом того, что у нас $\sigma_r = 0$, а σ_t и σ_z являются главными напряжениями, элемент шарового тензора расписывается следующим образом: $\sigma_o = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_t + \sigma_z}{3}$. В свою очередь $\varepsilon_o = \frac{\varepsilon_V}{3} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} = \frac{\sigma_o}{3K}$, где $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ - объемный модуль упругости. Подставляя

все в уравнение для кольцевой деформации получим: $\varepsilon_t = \frac{(\sigma_t + \sigma_z)(1-2\mu)}{3E} + \frac{\varepsilon_i}{2\sigma_i}(2\sigma_t - \sigma_z)$.

Подставляя, например, сюда ε_i выраженное через секущий модуль и коэффициент Пуассона, получаем такое же выражение, как и полученное вначале.

Считая материал несжимаемым, т.е. $\mu = 0,5$, а отсюда $\varepsilon_o = 0$, отношение ε_i/σ_i для тонкостенной оболочки с днщами переходит в выражение $1/E_C$ действительной

диаграммы деформирования. В таком случае: $\varepsilon_t = \frac{1}{E_C} \left(\sigma_t - \frac{\sigma_z}{2} \right) = \frac{3\sigma_t}{4E_C} = \frac{\sqrt{3}\sigma_i}{2E_C} = \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_i$.

Аналогично: $\varepsilon_z = \frac{1}{E_C} \left(\sigma_z - \frac{\sigma_t}{2} \right) = 0$, $\varepsilon_s = -\frac{3\sigma_t}{4E_C} = -\varepsilon_t$.

Для одноосного растяжения образца, аналогично имеем:

Уравнение в координатной форме для деформации вдоль направления растяжения

$\varepsilon_1 = \varepsilon_o + \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}(\sigma_1 - \sigma_o)$. Поскольку $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, то $\sigma_o = \frac{\sigma_1}{3}$. Подставляя ε_o и σ_o в ε_1 , имеем

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1(1-2\mu)}{3} \frac{1}{E} + \frac{\sigma_1 \varepsilon_i}{\sigma_i} = \varepsilon_i + \frac{\sigma_1(1-2\mu)}{3} \frac{1}{E}.$$

Подставляя, например, сюда ε_i , выраженное через секущий модуль и коэффициент

Пуассона, получаем такое же выражение, как и полученное вначале. $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_C}$.

Считая материал несжимаемым, т.е. $\mu = 0,5$, а отсюда $\varepsilon_o = 0$, отношение ε_i / σ_i переходит в выражение $1/E_C$ действительной диаграммы деформирования. В таком случае также

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_C} \text{ а } \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{\sigma_1}{2E_C}.$$

Зная кольцевые и по толщине стенки деформации баллона, можно вычислить давление соответствующее текущему нагруженному состоянию.

$$\text{Поскольку } \frac{r}{s} = \frac{r_o e^{\varepsilon_t}}{s_o e^{\varepsilon_s}} = \frac{r_o}{s_o} \exp\left(\frac{\sigma_i}{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{E_C} - \frac{1-2\mu}{E}\right)\right) = \frac{r_o}{s_o} \exp(\sqrt{3}\varepsilon_i),$$

$$\text{то } P = \frac{2\sigma_i s}{\sqrt{3}r} = \frac{2\sigma_i s_o}{\sqrt{3}r_o \exp\left(\frac{\sigma_i}{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{E_C} - \frac{1-2\mu}{E}\right)\right)} = \frac{2\sigma_i s_o}{\sqrt{3}r_o \exp(\sqrt{3}\varepsilon_i)}.$$

Напомним, интенсивность деформаций здесь для баллона, она несколько отличается от интенсивности деформаций по действительной диаграмме деформирования.

Для упругой области соответственно: $P = \frac{2\sigma_i s_o}{\sqrt{3}r_o \exp\left(\frac{2\sigma_i}{\sqrt{3}E}(1+\mu)\right)}$. Под экспонентой здесь стоит

корень из трех умноженный на интенсивность упругой деформации баллона.

При $\mu = 0,5$, поскольку $\varepsilon_s = -\varepsilon_t$, соответственно имеем: $\frac{r}{s} = \frac{r_o e^{\varepsilon_t}}{s_o e^{\varepsilon_s}} = \frac{r_o}{s_o} e^{2\varepsilon_t} = \frac{r_o}{s_o} e^{\sqrt{3}\varepsilon_i}$ и

$$P = \frac{2\sigma_i s_o}{\sqrt{3}r_o \exp\left(\frac{\sqrt{3}\sigma_i}{E_C}\right)} = \frac{2\sigma_i s_o}{\sqrt{3}r_o \exp(\sqrt{3}\varepsilon_i)}.$$

Понятно, что здесь уже интенсивность деформаций по действительной диаграмме деформирования.

Ради прикола, также можно показать, что для упругой области $\bar{\sigma}_i = \frac{\sigma_i}{\exp\left(\frac{\sigma_i 2(1+\mu)}{\sqrt{3}E}\right)}$.

Зная диаграмму ε_i, σ_i , и геометрические параметры баллона, можно построить зависимость $\Delta W, P$.

Порядок расчета НДС. Базовым параметром, как не трудно было заметить, является интенсивность напряжений. Через нее, по действительной диаграмме деформирования определяется секущий модуль упругости. Лучше чтобы он сразу был выражен как функция $E_C = E_C(\sigma_i)$. Затем находятся все необходимые параметры. Чтобы выйти на конкретное давление можно найти значения ниже и выше его, а затем сближать интервал, и т.п. Можно и методом последовательного нагружения. Задаваясь, например, небольшим ΔP (чем меньше, тем точнее), давление разбивается следующим образом $P_i = P_{i-1} + \Delta P$. Для P_i вычисляются напряжения, E_C , деформации и фактические r и s , которые затем идут в расчет напряжений при давлении P_{i+1} .

В общей формуле для давления в баллоне распишем интенсивность деформаций через сумму упругой и пластической составляющей.

$$P = \frac{2\sigma_i s}{\sqrt{3}r} = \frac{2\sigma_i s_o}{\sqrt{3}r_o \exp(\sqrt{3}\varepsilon_i)} = \frac{2\sigma_i s_o}{\sqrt{3}r_o \exp\left(\sqrt{3}\left(\varepsilon_i^y + \varepsilon_i^p\right)\right)} = \frac{2\sigma_i s_o}{\sqrt{3}r_o \exp(\sqrt{3}\varepsilon_i^y) \exp(\sqrt{3}\varepsilon_i^p)},$$

Здесь $\varepsilon_i^p = \varepsilon_{iocrm} = \sigma_i \left(\frac{1}{E_C} - \frac{1}{E} \right)$, $\varepsilon_i^y = \frac{2\sigma_i(1+\mu)}{3E}$. Следует заметить, что при одном и том же

значении интенсивности напряжений, расчетное давление зависит от коэффициента Пуассона - при $\mu=0,5$ оно несколько ниже. Далее

$$P = \frac{2s_o}{\sqrt{3}r_o \exp(\sqrt{3}\varepsilon_{iocrm})} \cdot \frac{\sigma_i}{\exp\left(\frac{2\sigma_i(1+\mu)}{\sqrt{3}E}\right)}. \text{ В итоге } \frac{\sigma_i}{\exp\left(\frac{2\sigma_i(1+\mu)}{\sqrt{3}E}\right)} = \frac{\sqrt{3}Pr_o \exp(\sqrt{3}\varepsilon_{iocrm})}{2s_o}.$$

Знаменатель левой части совсем немного больше единицы. С ростом интенсивности напряжений от нуля, он растет от единицы практически линейно. Поэтому его с большой

степенью точности можно представить как $\exp\left(\frac{2\sigma_i(1+\mu)}{\sqrt{3}E}\right) \approx 1 + \frac{2\sigma_i(1+\mu)}{\sqrt{3}E}$. В итоге получаем:

$$\sigma_i \approx \frac{1}{\frac{2s_o}{\sqrt{3}Pr_o \exp(\sqrt{3}\varepsilon_{iocrm})} - \frac{2(1+\mu)}{\sqrt{3}E}} \approx \frac{\sqrt{3}Pr_o \exp(\sqrt{3}\varepsilon_{iocrm})}{2s_o}.$$

Погрешность при интенсивности напряжений, например 1000 МПа, составляет для первого приближения не более минус 0,005 %, для второго не более минус 1 %.

Поскольку $\varepsilon_{iосм} = \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_{тосм}$, то зная остаточные кольцевые деформации срединной поверхности можно рассчитать интенсивность напряжений и сами напряжения, которые были достигнуты при внутреннем давлении P .

Приравнивая в формулах для напряжений и для упругих деформаций коэффициент Пуассона к 0,5, и ставя эти напряжения в соответствие с деформациями равными сумме остаточных плюс упругие, выходим на действительную диаграмму деформирования.

7. Потеря устойчивого пластического деформирования по деформационной теории пластичности.

Из выражения связывающего интенсивность напряжений с геометрическими параметрами баллона и внутренним давлением получаем $P = \frac{2s\sigma_i}{\sqrt{3}r}$. Текущие значения радиуса, и толщины стенки не являются постоянными при дифференцировании, поэтому дифференциал давления отсюда выглядит следующим образом $dP = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{sd\sigma_i}{r} + \frac{\sigma_i ds}{r} - \frac{\sigma_i s dr}{r^2} \right)$.

Понятно, что при деформации толщина стенки уменьшается ($ds < 0$), срединный радиус увеличивается ($dr > 0$), а хотя приращение интенсивности напряжений и больше нуля, но с ростом пластических деформаций эти приращения уменьшаются (ориентация на действительную диаграмму деформирования). Поэтому значения dP становятся все меньше и меньше, т.е. для дальнейшего деформирования требуется все меньшее увеличение давления. Как рассматривается в [8], когда при нагружении (продолжении нагнетания среды вовнутрь), давление перестанет расти, т.е. dP станет равным нулю, то оболочка с днцами теряет процесс устойчивого пластического деформирования, образуются локальные утонения стенки, и она разрушается путем разгерметизации. Хотя теоретически если бы этого не происходило, то при дальнейшем бы равномерном деформировании давление падало.

Из выражения $dP=0$, следует, что выражение в скобках должно равняться нулю. Приравнивая выражение в скобках к нулю, умножая его на r , преобразовывая, находим $d\sigma_i = \sigma_i \left(\frac{dr}{r} - \frac{ds}{s} \right)$. В скобках стоят приращения кольцевых и по толщине стенки деформаций, т.е. $d\sigma_i = \sigma_i (d\varepsilon_t - d\varepsilon_s)$.

При $\mu=0,5$ деформации в скобках одинаковы по модулю, и легко выражаются через приращение их интенсивности, т.е. $d\sigma_i = \sigma_i (d\varepsilon_t - d\varepsilon_s) = \sigma_i 2d\varepsilon_t = \sqrt{3}\sigma_i d\varepsilon_i$. В итоге получаем соответствие условию потери равномерного пластического деформирования на действительной диаграмме деформирования: $\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = \frac{E_K}{\sqrt{3}}$. О касательном модуле E_K см. ниже.

Распишем полные приращения всех деформаций.

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_t &= d \left(\frac{\sigma_i}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1-2\mu}{E} + \frac{3}{E_C} \right) \right) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{(1-2\mu)d\sigma_i}{E} + \frac{3d\sigma_i}{E_C} - \frac{3\sigma_i dE_C}{E_C^2} \right) \\ d\varepsilon_s &= d \left(\frac{\sqrt{3}\sigma_i}{2} \left(\frac{1-2\mu}{E} - \frac{1}{E_C} \right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{(1-2\mu)d\sigma_i}{E} - \frac{d\sigma_i}{E_C} + \frac{\sigma_i dE_C}{E_C^2} \right) \\ d\varepsilon_z &= d \left(\frac{2\sigma_i}{\sqrt{3}E} \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \right) = \frac{2d\sigma_i}{\sqrt{3}E} \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \\ d\varepsilon_i &= d \left(\frac{\sigma_i}{3} \left(\frac{2\mu-1}{E} + \frac{3}{E_C} \right) \right) = \frac{(2\mu-1)d\sigma_i}{3E} + \frac{d\sigma_i}{E_C} - \frac{\sigma_i dE_C}{E_C^2} \end{aligned} \right\}$$

Отсюда также приходим к выражению $d\varepsilon_t - d\varepsilon_s = \sqrt{3}d\varepsilon_i$.

В итоге получаем такое же выражение для потери устойчивого пластического деформирования, как и при $\mu=0,5$, т.е. $\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}$. Но здесь приращение интенсивности деформаций по диаграмме для баллона при $\mu \neq 0,5$.

8. Связь коэффициента остаточного расширения с текущим коэффициентом запаса прочности.

Коэффициент остаточного расширения представляет собой отношение остаточного изменения объема к полному его изменению: $K_{op} = \frac{\Delta W_{ост}}{\Delta W_{полн}} = \frac{\Delta W_{полн} - \Delta W_{упр}}{\Delta W_{полн}}$.

Текущий коэффициент запаса прочности это отношение максимального давления к текущему: $n_{Bi} = P_B / P_i$. Более подробная информация о расчете K_{op} с учетом промежуточных этапов приведена в разделе 15 и в материалах [9]. В [9] также отражены некоторые результаты испытаний для кислородных 40-ка литровых баллонов.

Расписывая в принятых обозначениях, имеем:

$K_{op} = \frac{\Delta W_p}{\Delta W} = \frac{\Delta W - \Delta W_y}{\Delta W} = 1 - \frac{\Delta W_y}{\Delta W}$. Подставляя сюда найденные выше изменения объемов, имеем:

$$K_{op} = 1 - \frac{\exp\left(\frac{\sigma_i(5-4\mu)}{\sqrt{3}E}\right) - 1}{\exp\left(\frac{\sigma_i}{\sqrt{3}} \left(\frac{2-4\mu}{E} + \frac{3}{E_C} \right)\right) - 1}. \text{ В упругой области } K_{op} = 0, \text{ а при } \mu = 0,5$$

$$K_{op} = 1 - \frac{\exp\left(\frac{\sqrt{3}\sigma_i}{E}\right) - 1}{\exp\left(\frac{\sqrt{3}\sigma_i}{E_C}\right) - 1}.$$

Расчетное значение коэффициента остаточного расширения при $\mu=0,5$, немного больше чем при $\mu<0,5$.

Обозначая индексом m значения соответствующие максимальному давлению, после сокращения, получаем:

$$n_{Bi} = \frac{P_B}{P_i} = \frac{\sigma_{im} \exp\left(\frac{\sigma_i}{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{E_C} - \frac{1-2\mu}{E}\right)\right)}{\sigma_i \exp\left(\frac{\sigma_{im}}{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{E_{Cm}} - \frac{1-2\mu}{E}\right)\right)}. \text{ При } \mu=0,5, n_{Bi} = \frac{\sigma_{im} \exp\left(\frac{\sqrt{3}\sigma_i}{E_C}\right)}{\sigma_i \exp\left(\frac{\sqrt{3}\sigma_{im}}{E_{Cm}}\right)}.$$

Расчетное значение текущего коэффициента запаса прочности при $\mu=0,5$, немного меньше чем при $\mu<0,5$. Вообще, при определении текущего коэффициента запаса прочности, коэффициент Пуассона практически не влияет и можно полагать $\mu=0,5$. Погрешность при этом, по сравнению с расчетом при $\mu=0,3$ например, отрицательна и по абсолютному значению составляет менее 0,1 %.

Отсюда видно, что теоретические K_{op} и n_{Bi} не зависят от геометрических параметров и объема баллона в тонкостенном его представлении, а определяются свойствами действительной диаграммы деформирования и сущностью цилиндрической формы имеющей днища. Тем же свойством обладает и графическая зависимость $n_{Bi} = f(K_{op})$.

Гипотеза: Для баллонов, не имеющих дефектов, изготовленных из одной марки стали и по одной технологии, независимо от различий в толщине стенки, наружного диаметра и длины, экспериментальная зависимость $n_{Bi} = f(K_{op})$ будет одинаковой. Положение «не имеющих дефектов» означает, что если баллон нагружать медленно возрастающим внутренним давлением вплоть до предельного состояния, то его разрушение будет происходить вследствие исчерпания несущей способности самого металла.

9. Теория пластического течения.

Ее также называют теорией течения. Используется тогда, когда при нагружении напряжения не пропорциональны между собой, т.е. нагружение не является простым [7]. Поверхность пластичности, построенная по компонентам тензора напряжений, в процессе нагружения, равномерно расширяется, эффект Баушингера при этом не описывается. Интенсивность приращения пластических деформаций, в общем случае она не равняется приращению интенсивности пластических деформаций.

Приращение деформаций вдоль главного направления 1 можно представить следующим образом [7]:

$$d\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \left(d\sigma_1 - \mu(d\sigma_2 + d\sigma_3) \right) + \frac{d\sigma_i}{\sigma_i} \left(\frac{1}{E_K} - \frac{1}{E} \right) \left(\sigma_1 - 0,5(\sigma_2 + \sigma_3) \right),$$

где $E_K = d\sigma_i / d\varepsilon_i$ касательный модуль по единой кривой σ_i, ε_i . Касательный модуль можно выразить как функцию интенсивности напряжений $E_K = E_K(\sigma_i)$. Его также его можно выразить и как функцию секущего модуля. На начальных стадиях пластического деформирования функции $E_K = E_K(\sigma_i)$ и $\bar{E}_K = \bar{E}_K(\bar{\sigma})$ практически равны.

Касательный модуль в упругой области равен обычному и секущему, а с ростом пластических деформаций уменьшается - по диаграмме растяжения до нуля, а по диаграмме деформирования, практически до нуля. Касательный модуль, как и секущий, связан с действительной диаграммой деформирования, поэтому когда $\mu \neq 0,5$, его не расписывают в виде $d\sigma_i / d\varepsilon_i$.

Найдем связь между касательными модулями действительной диаграммы деформирования и диаграммы растяжения.

Поскольку $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_i}{1+\bar{e}}$, то $\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{e}} = \frac{1}{1+\bar{e}} \cdot \frac{d\sigma_i}{d\bar{e}} - \frac{\sigma_i}{(1+\bar{e})^2}$, а т.к. $d\bar{e} = (1+\bar{e})d\varepsilon_i$, то

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{e}} = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i(1+\bar{e})^2} - \frac{\sigma_i}{(1+\bar{e})^2} = \frac{1}{(1+\bar{e})^2} \left(\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} - \sigma_i \right). \text{ Отсюда следует, что } \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{e}}(1+\bar{e})^2 + \sigma_i, \text{ т.е.}$$

$E_K = \bar{E}_K(1+\bar{e})^2 + \sigma_i = (1+\bar{e})(\bar{E}_K(1+\bar{e}) + \bar{\sigma})$. Эту же зависимость можно найти, просто расписывая дифференциалы:

$$\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = \frac{d(\bar{\sigma}(1+\bar{e}))}{d \ln(1+\bar{e})} = \frac{(1+\bar{e})d\bar{\sigma} + \bar{\sigma}d\bar{e}}{\frac{d\bar{e}}{1+\bar{e}}} = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{e}}(1+\bar{e})^2 + \bar{\sigma}(1+\bar{e}) = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{e}}(1+\bar{e})^2 + \sigma_i.$$

Отсюда также можно показать, что при одноосном растяжении образца, моменту близкому к началу образования шейки, когда напряжения на диаграмме растяжения перестают расти, т.е. $d\bar{\sigma}/d\bar{e} = 0$, на действительной диаграмме деформирования соответствует значение $d\sigma_i/d\varepsilon_i = \sigma_i$. Близкому потому, что перед началом образования шейки, на диаграмме растяжения присутствует незначительный горизонтальный участок. Ниже будет приведено условие потери устойчивого равномерного пластического деформирования для цилиндрической оболочки с днищами.

$$d\varepsilon_t = \frac{1}{E} \left(d\sigma_t - \mu d\sigma_z \right) + \frac{d\sigma_i}{\sigma_i} \left(\frac{1}{E_K} - \frac{1}{E} \right) \left(\sigma_t - 0,5\sigma_z \right)$$

Аналогично записываются и дифференциалы осевых и по толщине стенки деформаций.

В случае одноосного растяжения образца, например, получаем:

$$d\varepsilon_1 = \frac{d\sigma_1}{E} + \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} \left(\frac{1}{E_K} - \frac{1}{E} \right) \sigma_1 = \frac{d\sigma_1}{E_K}, \quad d\varepsilon_2 = d\varepsilon_3 = \frac{d\sigma_1}{2} \left(\frac{1-2\mu}{E} - \frac{1}{E_K} \right) \text{ и } d\varepsilon_V = \frac{d\sigma_1(1-2\mu)}{E}.$$

Индексом 1 указано направление растяжения, а - 2 и 3 поперечные направления.

Расписывая дифференциал кольцевых деформаций получаем:

$$d\varepsilon_t = \frac{1}{E} \left(d\sigma_t - \mu \frac{d\sigma_t}{2} \right) + \frac{d\sigma_i}{\sigma_i} \left(\frac{1}{E_K} - \frac{1}{E} \right) \left(\sigma_t - \frac{\sigma_t}{4} \right) = \frac{d\sigma_t}{E} (1-0,5\mu) + \frac{3d\sigma_i}{4\sigma_i} \left(\frac{1}{E_K} - \frac{1}{E} \right) \sigma_t, \text{ или}$$

$$d\varepsilon_t = \frac{2d\sigma_i}{\sqrt{3}E} (1-0,5\mu) + \frac{\sqrt{3}d\sigma_i}{2} \left(\frac{1}{E_K} - \frac{1}{E} \right) = \frac{d\sigma_i}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1-2\mu}{E} + \frac{3}{E_K} \right).$$

Разложение дифференциала интенсивности напряжений выглядит следующим образом:

$$d\sigma_i = d \left(\frac{\sqrt{3}rP}{2s} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{rdP}{s} + \frac{Pdr}{s} - \frac{rPds}{s^2} \right).$$

Также можно показать, что $\frac{d\sigma_i}{\sigma_i} = \frac{d\sigma_t}{\sigma_t} = \frac{d\sigma_z}{\sigma_z}$ и $\frac{d\sigma_i}{\sigma_i} = \frac{dP}{P} + \frac{dr}{r} - \frac{ds}{s}$.

Дифференциалы $d\varepsilon_z$ и $d\varepsilon_s$ по структуре аналогичны деформациям ε_z и ε_s деформационной теории пластичности, только вместо секущего модуля касательный, а вместо интенсивности напряжений ее дифференциал. То же самое касается и $d\varepsilon_i$.

$$d\varepsilon_i = \frac{d\sigma_i}{3} \left(\frac{2\mu-1}{E} + \frac{3}{E_K} \right) = \frac{d\sigma_i(2\mu-1)}{3E} + \frac{d\sigma_i}{E_K}.$$

Или раскладывая на упругую и пластическую составляющие имеем:

$$d\varepsilon_i = d\varepsilon_i^y + d\varepsilon_i^P = \frac{2(1+\mu)}{3E} d\sigma_i + \left(\frac{1}{E_K} - \frac{1}{E} \right) d\sigma_i. \text{ Отметим: } d\varepsilon_i^P = \left(\frac{1}{E_K} - \frac{1}{E} \right) d\sigma_i.$$

Согласно положениям, приведенным в [8], кольцевые деформации записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_t &= \frac{1}{E} (d\sigma_t - \mu d\sigma_z) + \frac{3}{2} \frac{(d\varepsilon^P)_i}{\sigma_i} (\sigma_t - \sigma_o) = \frac{1}{E} (d\sigma_t - \mu d\sigma_z) + \frac{3}{2} \frac{(d\varepsilon^P)_i}{\sigma_i} \left(\frac{2\sigma_t}{3} - \frac{\sigma_z}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{E} (d\sigma_t - \mu d\sigma_z) + \frac{(d\varepsilon^P)_i}{\sigma_i} \left(\sigma_t - \frac{\sigma_z}{2} \right) = \frac{d\sigma_t}{E} (1-0,5\mu) + \frac{3\sigma_t (d\varepsilon^P)_i}{4\sigma_i} = \frac{2d\sigma_i}{\sqrt{3}E} (1-0,5\mu) + \frac{\sqrt{3}(d\varepsilon^P)_i}{2} \end{aligned}$$

Аналогичным образом записываются осевые и по толщине стенки деформации.

Здесь $(d\varepsilon^P)_i$ - интенсивность приращения пластических деформаций, в общем случае она не равняется приращению интенсивности пластических деформаций $d\varepsilon_i^P$. Коэффициент $(d\varepsilon^P)_i / \sigma_i$ не зависит от сложности нагружения.

Но, для одноосного растяжения образца: $(d\varepsilon^P)_i = d\varepsilon_i^P = d\varepsilon_p$. Для цилиндрической же трубы с днищами осевые пластические деформации равны нулю, и т.к. площадь кольца (поперечного сечения трубы) после снятия нагрузки не изменяется, то можно показать, что кольцевые и по толщине стенки пластические деформации различаются только знаком. В таком случае и приращения пластических деформаций различаются только знаком. Поэтому $(d\varepsilon^P)_i = \frac{2}{\sqrt{3}} d\varepsilon_t^P$, а т.к. $\varepsilon_i^P = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_t^P$, то $d\varepsilon_i^P = \frac{2}{\sqrt{3}} d\varepsilon_t^P$, следовательно, и $(d\varepsilon^P)_i = d\varepsilon_i^P$. Что и понятно, т.к. это простое нагружение.

Поскольку $\frac{d\varepsilon_i^P}{\sigma_i} = \frac{1}{\sigma_i} \left(\frac{d\sigma_i}{E_K} - \frac{d\sigma_i}{E} \right) = \frac{d\sigma_i}{\sigma_i} \left(\frac{1}{E_K} - \frac{1}{E} \right)$, то это выражение полностью совпадает с предыдущим.

Приращение интенсивности пластических деформаций $d\varepsilon_i^P = \frac{d\sigma_i}{E_K} - \frac{d\sigma_i}{E} = d\sigma_i \left(\frac{1}{E_K} - \frac{1}{E} \right)$.

Порядок расчета НДС. Базовым параметром является интенсивность напряжений и ее приращение. Расчет производят методом последовательного нагружения, описанным в деформационной теории пластичности. Касательный модуль лучше выражать в виде $E_K = E_K(\sigma_i)$.

10. Геометрическая интерпретация положений теорий пластичности.

На рисунке 1 представлена геометрическая интерпретация упругого решения и положений теорий пластичности применительно к стальной тонкостенной цилиндрической оболочке с днищами. Пунктирными линиями - упругое решение и решения по теориям пластичности при коэффициенте Пуассона меньшим 0,5. При коэффициенте Пуассона равным 0,5 пунктирные линии переходят в сплошные. В реальности, влияние коэффициента Пуассона естественно невелико и разница между зависимостями за пределами упругости, незначительна. Интересно отметить, что пластическая составляющая и ее приращение не зависят от коэффициента Пуассона. На реальных диаграммах зависимость интенсивности напряжений от параметра Удквиста (см. ниже), за пределами упругости, также мало отличается от действительной диаграммы деформирования.

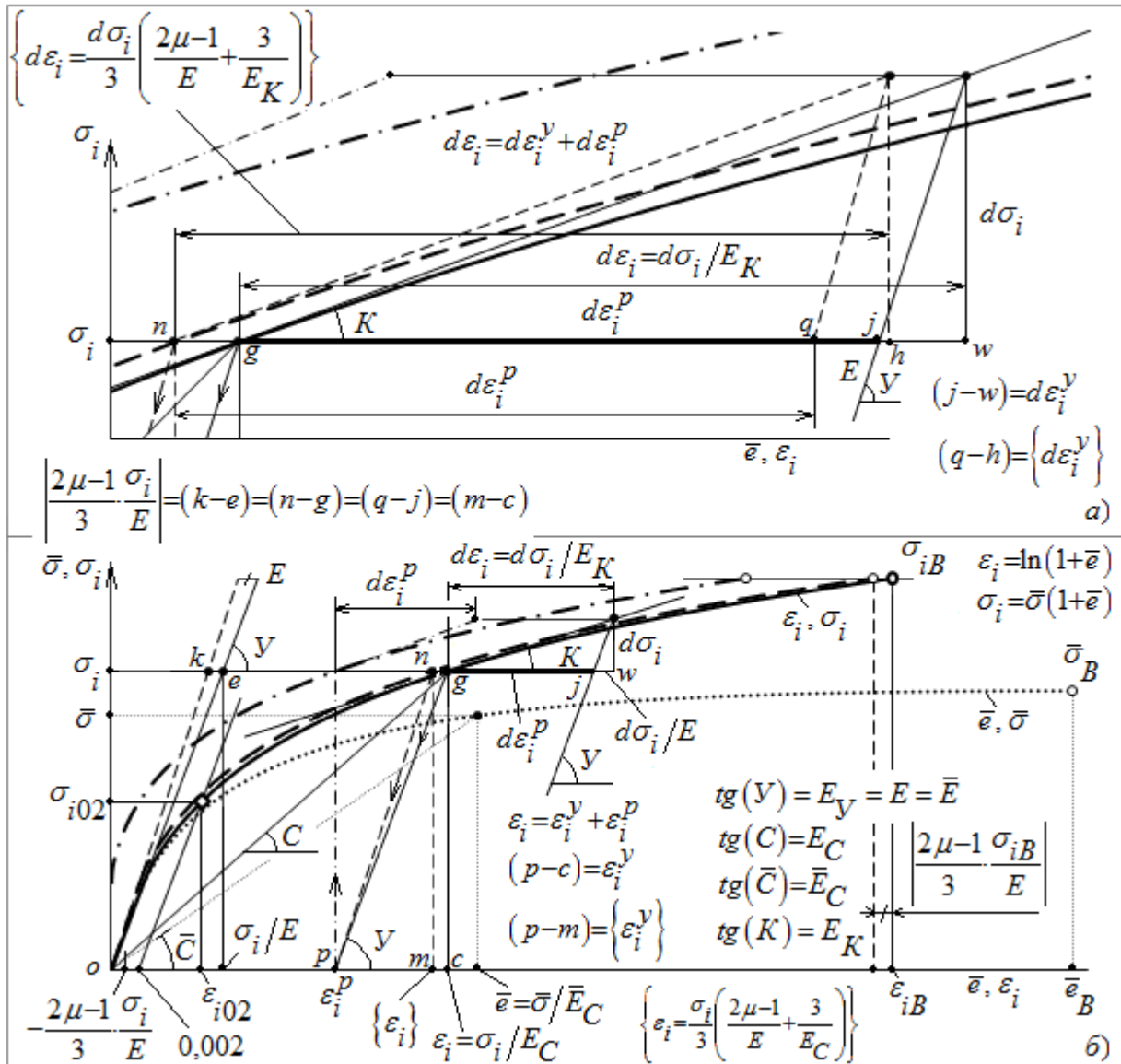


Рис. 1. Геометрическая интерпретация положений теорий пластичности применительно к стальной тонкостенной цилиндрической оболочке с днищами:

а - решение в приращениях по теории пластического течения; *б* - решение по деформационной теории пластичности.

сплошные линии для действительной диаграммы деформирования и для баллона в предположении коэффициента Пуассона равным 0,5; пунктирные - расчетные значения для баллона; штрих пунктирные - функция от параметра Удквиста; в фигурных скобках решения для баллона при коэффициенте Пуассона < 0,5.

Поскольку для одноосного растяжения $(d\varepsilon^P)_i = d\varepsilon_i^P = d\varepsilon_p$, то смещение каждой точки действительной диаграммы деформирования влево на величину упругой разгрузки соответствующей этой точке является функцией от параметра Удквиста, т.е. $\sigma_i = \Phi \int (d\varepsilon^P)_i$.

Для одноосного растяжения параметр Удквиста равен: $\int (d\varepsilon^P)_i = \int d\varepsilon_i^P = \varepsilon_i^P = \varepsilon_p$.

Рассмотрим приращения интенсивности деформаций по деформационной теории и теории пластического течения соответственно, т.е.

$$d\varepsilon_i = \frac{(2\mu-1)d\sigma_i}{3E} + \frac{d\sigma_i}{E_C} - \frac{\sigma_i dE_C}{E_C^2}, \text{ (совпадает с выведенным выше), и } d\varepsilon_i = \frac{d\sigma_i(2\mu-1)}{3E} + \frac{d\sigma_i}{E_K}.$$

Видно, что у них первые слагаемые равны. Напомним, что секущий и касательный модуль определяются по действительной диаграмме деформирования.

Имея $dE_C = d\left(\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right) = \frac{d\sigma_i}{\varepsilon_i} - \frac{\sigma_i d\varepsilon_i}{\varepsilon_i^2}$, оставшаяся составная часть приращения интенсивности

деформаций по деформационной теории раскладывается следующим образом:

$$\frac{d\sigma_i}{E_C} - \frac{\sigma_i dE_C}{E_C^2} = \frac{d\sigma_i}{E_C} - \frac{\sigma_i}{E_C^2} \left(\frac{d\sigma_i}{\varepsilon_i} - \frac{\sigma_i d\varepsilon_i}{\varepsilon_i^2} \right) = \frac{d\sigma_i}{E_C} - \frac{d\sigma_i}{E_C} + d\varepsilon_i = d\varepsilon_i. \text{ Отметим, что здесь, поскольку}$$

раскладывается секущий модуль, то интенсивность деформации, и ее приращение соответствуют действительной диаграмме деформирования. То же, см. ниже для касательного модуля.

Второе слагаемое по теории пластического течения раскладывается: $\frac{d\sigma_i}{E_K} = \frac{d\sigma_i d\varepsilon_i}{d\sigma_i} = d\varepsilon_i.$

Отсюда видим, что приращения интенсивности деформаций по одной и второй теории равны.

Рассмотрим пластические составляющие, т.е. приращения интенсивностей пластических деформаций:

$$d\varepsilon_i^p = \left(\frac{1}{E_C} - \frac{1}{E} \right) d\sigma_i - \sigma_i \frac{dE_C}{E_C^2} \text{ и } d\varepsilon_i^p = \left(\frac{1}{E_K} - \frac{1}{E} \right) d\sigma_i. \text{ Отсюда } \frac{d\sigma_i}{E_C} - \sigma_i \frac{dE_C}{E_C^2} \text{ и } \frac{d\sigma_i}{E_K}. \text{ Они между}$$

собой равны, следовательно, равны и пластические составляющие.

$$\text{Расписывая } dE_C/E_C, \text{ имеем } \frac{dE_C}{E_C} = \frac{\varepsilon_i d\sigma_i}{\varepsilon_i \sigma_i} - \frac{\varepsilon_i \sigma_i d\varepsilon_i}{\sigma_i \varepsilon_i^2} = \frac{d\sigma_i}{\sigma_i} - \frac{d\varepsilon_i}{\varepsilon_i}. \text{ Стоит обратить}$$

внимание на выражение $\frac{dE_C}{E_C} = \frac{d\sigma_i}{\sigma_i} - \frac{d\varepsilon_i}{\varepsilon_i}$. Его составляющие по своей структуре подобны

логарифмической деформации. Переведем их в другой вид, соответствующий переводу логарифмической деформации в обычную. Интегрируя это выражение в конечных пределах

$$\text{получаем } \ln\left(1 + \frac{\Delta E_C}{E_{Co}}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta \sigma_i}{\sigma_{io}}\right) - \ln\left(1 + \frac{\Delta \varepsilon_i}{\varepsilon_{io}}\right). \text{ Данное выражение имеет конечную}$$

геометрическую интерпретацию. Нанося на некотором расстоянии друг от друга две точки на Декартовой плоскости, неважно в каком октанте, главное в одном. Первую точку свяжем с первоначальным состоянием, вторую с измененным, на конечные приращения. Равенство при этом справедливо. Стремя вторую точку по оси деформаций к первой (независимо от напряжений), будет выполняться первоначальное неизменное выражение. На диаграмме же из условия ее монотонности при $\Delta \varepsilon_i \Rightarrow 0$, следует $\Delta \sigma_i \Rightarrow 0$.

Беря отношение дифференциалов при $\mu \neq 0,5$, получаем

$$\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = \frac{d\sigma_i}{\frac{d\sigma_i(2\mu-1)}{3E} + \frac{d\sigma_i}{E_K}} = \frac{3E \cdot E_K}{E_K(2\mu-1) + 3E} = \frac{E_K}{\frac{E_K(2\mu-1)}{3E} + 1} \approx E_K. \text{ При } \mu=0,5 \text{ получаем четкое}$$

равенство. Поскольку $\frac{d\sigma_i}{E_C} - \frac{\sigma_i dE_C}{E_C^2} = \frac{d\sigma_i}{E_K}$, то отношение приращения интенсивности

напряжений к приращению интенсивности деформаций из деформационной теории пластичности: $\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = \frac{d\sigma_i}{\frac{(2\mu-1)d\sigma_i}{3E} + \frac{d\sigma_i}{E_C} - \frac{\sigma_i dE_C}{E_C^2}}$, равно такому же отношению по теории

пластического течения.

11. Приращения пластических деформаций.

Выпишем приращения интенсивностей пластических деформаций по одной и второй

$$\text{теории: } d\varepsilon_i^P = \left(\frac{1}{E_C} - \frac{1}{E} \right) d\sigma_i - \sigma_i \frac{dE_C}{E_C^2} \text{ и } d\varepsilon_i^P = \left(\frac{1}{E_K} - \frac{1}{E} \right) d\sigma_i.$$

Интенсивность приращения пластических деформаций ($d\bar{\varepsilon}_i^P$), в общем случае не равняется приращению интенсивности пластических деформаций, и определяется по формуле:

$$d\bar{\varepsilon}_i^P = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\left(d\varepsilon_t^P - d\varepsilon_z^P \right)^2 + \left(d\varepsilon_z^P - d\varepsilon_s^P \right)^2 + \left(d\varepsilon_s^P - d\varepsilon_t^P \right)^2}.$$

Выпишем пластические составляющие по деформационной теории:

$$\varepsilon_t^P = \left(\frac{1}{E_C} - \frac{1}{E} \right) (\sigma_t - 0,5\sigma_z), \varepsilon_z^P = \left(\frac{1}{E_C} - \frac{1}{E} \right) (\sigma_z - 0,5\sigma_t), \varepsilon_s^P = - \left(\frac{1}{E_C} - \frac{1}{E} \right) \frac{(\sigma_t + \sigma_z)}{2}. \text{ Поскольку}$$

$\sigma_t = 2\sigma_z$, то выражая их через интенсивность напряжений имеем:

$$\varepsilon_t^P = -\varepsilon_s^P = \left(\frac{1}{E_C} - \frac{1}{E} \right) \frac{\sqrt{3}\sigma_i}{2}, \varepsilon_z^P = 0.$$

Отсюда: $d\varepsilon_t^P = -d\varepsilon_s^P = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{E_C} - \frac{1}{E} \right) d\sigma_i - \frac{\sqrt{3}\sigma_i}{2} \frac{dE_C}{E_C^2}$, $d\varepsilon_z^P = 0$. Следовательно $d\bar{\varepsilon}_i^P = \frac{2}{\sqrt{3}} d\varepsilon_t^P$. И

в итоге: $d\bar{\varepsilon}_i^P = d\varepsilon_i^P$.

По теории пластического течения: $d\varepsilon_t^P = -d\varepsilon_s^P = \frac{\sqrt{3}d\sigma_i}{2} \left(\frac{1}{E_K} - \frac{1}{E} \right)$, $d\varepsilon_z^P = 0$. Т.е. также

$$d\bar{\varepsilon}_i^P = \frac{2}{\sqrt{3}} d\varepsilon_t^P, \text{ и } d\bar{\varepsilon}_i^P = d\varepsilon_i^P.$$

Для тонкостенной трубы с днищами, нагружаемой внутренним давлением, интенсивность приращения пластических деформаций равняется приращению интенсивности пластических деформаций. То же самое касается и трубы без днищ, а также одноосного растяжения образца, (см. ниже).

В случае пластического деформирования под внутренним давлением тонкостенной трубы без днищ реализуется такое же НДС, как и при растяжении стержня. Деформации описываются одинаковыми зависимостями. Рассмотрим некоторые выкладки для трубы. Для образца все тоже самое, только вместо кольцевых деформаций (ε_t), деформации вдоль оси растяжения образца, а деформации ε_z и ε_s - поперечные деформации. Аналогично и напряжения.

Для трубы без днищ $\sigma_i = \sigma_t$, $\varepsilon_t^P = \sigma_i \left(\frac{1}{E_C} - \frac{1}{E} \right)$, $\varepsilon_z^P = \varepsilon_s^P = -0,5 \varepsilon_t^P$. Далее

$$d\varepsilon_t^P = \left(\frac{1}{E_C} - \frac{1}{E} \right) d\sigma_i - \sigma_i \frac{dE_C}{E_C^2}, \quad d\varepsilon_z^P = d\varepsilon_s^P = -0,5 d\varepsilon_t^P. \quad \text{Далее раскладывая } d\bar{\varepsilon}_t^P \text{ по}$$

определению, имеем $d\bar{\varepsilon}_t^P = d\varepsilon_t^P$.

Раскладывая интенсивность деформаций на упругую и пластическую составляющие, имеем:

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{3} \left(\frac{3}{E_C} - \frac{1-2\mu}{E} \right) = \frac{2\sigma_i(1+\mu)}{3E} + \sigma_i \left(\frac{1}{E_C} - \frac{1}{E} \right). \quad \text{Отсюда по понятным соображениям приходим}$$

к выводу: $d\bar{\varepsilon}_t^P = d\varepsilon_t^P$. Расписывая по теории пластического течения, где $d\varepsilon_t^P = \left(\frac{1}{E_K} - \frac{1}{E} \right) d\sigma_i$

и $d\varepsilon_i = d\varepsilon_i^y + d\varepsilon_i^P = \frac{2(1+\mu)}{3E} d\sigma_i + \left(\frac{1}{E_K} - \frac{1}{E} \right) d\sigma_i$, приходим к такому же заключению.

12. Деформационная теория пластичности при коэффициенте Пуассона 0,5, дополнение.

Принятие коэффициента Пуассона равным 0,5 существенно упрощает расчет пластических деформаций. Материал считается несжимаемым, т.е. объем его не изменяется, что соответствует $\varepsilon_o = 0$, и как выше было показано, осевые деформации равны нулю.

Теорию малых упругопластических деформаций можно использовать и при больших деформациях. Здесь также все выкладки приведены с учетом изменения геометрических размеров. Как показывает теория малых упругопластических деформаций, при увеличении деформаций за пределы упругости, коэффициент Пуассона стремится к 0,5. Вообще при принятии $\mu = 0,5$ решения в пластической области более приближены к реальности, но при малых деформациях эти решения не переходят автоматически в упругие решения, вернее они переходят в такие упругие решения, где коэффициент Пуассона равен тоже 0,5.

О коэффициенте поперечной деформации [8].

Теория малых упруго-пластических деформаций позволяет установить значения коэффициента Пуассона и за пределами упругости, будем обозначать его как μ^{\sim} . И это будет уже функция.

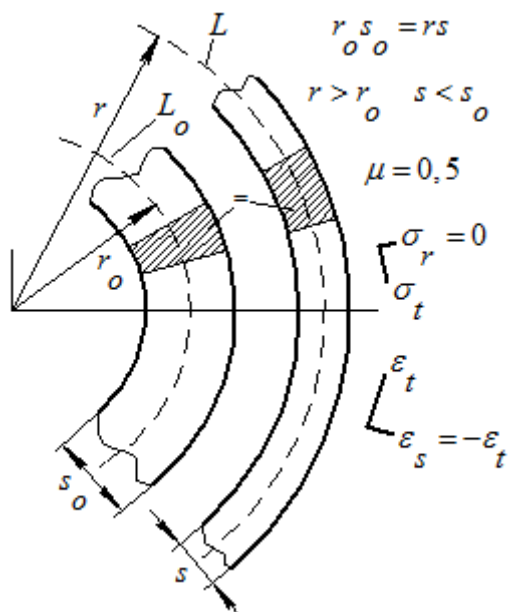
Обозначая поперечную деформацию через ε^{\wedge} , для одноосного растяжения ($\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \sigma_o = \frac{\sigma}{3}$), имеем $\varepsilon_1 = \varepsilon, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon^{\wedge}$. Отсюда $\varepsilon_o = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} = \frac{\varepsilon + 2\varepsilon^{\wedge}}{3}$.

Поскольку $3\varepsilon_o = \frac{\sigma_o}{K} = \frac{\sigma}{3K}$, то $\varepsilon + 2\varepsilon^{\wedge} = \frac{\sigma}{3K}$, и т.к. $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$, окончательно получим

$$\mu^{\sim} = \left| \frac{\varepsilon^{\wedge}}{\varepsilon} \right| = \frac{1}{2} - \frac{1-2\mu}{2E} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon} - \text{коэффициент Пуассона при пластической деформации.}$$

При росте пластических деформаций: $\frac{\sigma}{\varepsilon} \rightarrow 0 \Rightarrow \mu^{\sim} \rightarrow 0,5$.

На рисунке 2 приведена схема пластической деформации тонкостенной трубы с днищами нагруженной внутренним давлением при $\mu = 0,5$.



$$\varepsilon_t = \ln \frac{L}{L_o} = \ln \frac{2\pi r}{2\pi r_o} = \ln \frac{r}{r_o} = \varepsilon_r, \quad \varepsilon_s = \ln \frac{s}{s_o}$$

$$\mu = 0,5 \Rightarrow \varepsilon_z = \ln \frac{l}{l_o} = 0, \quad \varepsilon_s = -\varepsilon_t$$

Рис. 2. Схема пластической деформации тонкостенной трубы с днищами нагруженной внутренним давлением при $\mu = 0,5$.

Примечания: σ_z, ε_z - направлены вдоль оси трубы. Площади заштрихованных областей между собой равны.

Как было показано выше, при $\mu = 0,5$, $\varepsilon_o = 0$, $\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} = \frac{1}{E_C}$, $\varepsilon_z = 0$, $\varepsilon_s = -\varepsilon_t$. Интенсивность деформаций пропорциональна ε_t а, следовательно, и ε_s . Естественно, что она также остается не пропорциональной интенсивности напряжений, (E_C - переменная величина).

Поскольку осевая деформация равна нулю, то

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_t - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_s)^2 + (\varepsilon_s - \varepsilon_t)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_t)^2 + (\varepsilon_s)^2 + (\varepsilon_s - \varepsilon_t)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{2\varepsilon_t^2 + 4\varepsilon_t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_t\end{aligned}$$

Также стоит повториться, что $\varepsilon_t = -\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_i}{2\sigma_i} (2\sigma_t - \sigma_z) = \frac{3}{4} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \cdot \frac{Pr}{s} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sigma_t}{E_C}$.

Поскольку $\ln \frac{r}{r_0} = -\ln \frac{s}{s_0} \Rightarrow \ln \frac{r}{r_0} = \ln \left(\frac{s}{s_0} \right)^{-1}$, следовательно $\frac{r}{r_0} = \frac{s_0}{s}$, отсюда $r \cdot s = r_0 \cdot s_0$. Эту же

зависимость можно получить из условия не изменения объема металла баллона, а т.к. осевые пластические деформации равны нулю, то из условия сохранения площади поперечного сечения баллона, занятой металлом. Площадь при этом считается как разность площадей кругов описанных наружным и внутренним радиусами. Это положение верно и при остаточных деформациях после пластического деформирования. Также примечательно, что $\sigma_i \cdot \varepsilon_i = \sigma_t \cdot \varepsilon_t$.

Так $r = r_0 e^{\varepsilon_t}$ и $s = s_0 e^{-\varepsilon_t}$, т.е. $\frac{r}{s} = \frac{r_0}{s_0} \exp(2\varepsilon_t)$, следовательно,

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{Pr}{s} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{Pr_0 e^{2\varepsilon_t}}{s_0} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{Pr_0}{s_0} e^{\sqrt{3}\varepsilon_i}.$$

Таким образом, в пластической области, принимая условие несжимаемости, внутреннее давление в баллоне можно связать с действительной диаграммой деформирования σ_i, ε_i

следующим образом: $P = \frac{2s\sigma_i}{\sqrt{3}r} = \frac{2s_0\sigma_i}{\sqrt{3}r_0 e^{\sqrt{3}\varepsilon_i}}$.

Без учета изменений размеров имеем: $P = \frac{2s_0\sigma_i}{\sqrt{3}r_0}$, а заменяя σ_i на $\bar{\sigma}_i$, получаем выражение

для упругой области, см. выше.

Выражая действительную диаграмму деформирования σ_i, ε_i , через диаграмму растяжения $\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}$: $\varepsilon_i = \ln(1 + \bar{\varepsilon})$, $\sigma_i = \bar{\sigma}(1 + \bar{\varepsilon})$, можно связать внутреннее давление в баллоне с

диаграммой растяжения: $P = \frac{2s_0\bar{\sigma}}{\sqrt{3}r_0} (1 + \bar{\varepsilon}) (1 - \sqrt{3})$.

Поскольку $\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_t$, то из выражения $P = \frac{2s_o\sigma_i}{\sqrt{3}r_o e^{\sqrt{3}\varepsilon_i}}$ кольцевые деформации равны

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2s_o\sigma_i}{\sqrt{3}r_o P} \right), \text{ или } \bar{\varepsilon}_t = e^{\varepsilon_t} - 1 = \sqrt{\frac{2s_o\sigma_i}{\sqrt{3}r_o P}} - 1. \text{ Используя понятие секущего модуля, из того же}$$

выражения можно получить зависимость $2\varepsilon_t - \ln \varepsilon_t = \ln \left(\frac{4E_C s_o}{3r_o P} \right)$. Пренебрегая первым

членом в левой части уравнения можно получить приближенную формулу: $\varepsilon_t \approx \frac{3r_o P}{4E_C s_o}$,

погрешность незначительная и растет с ростом деформаций, левая часть больше правой. Если вместо ε_t брать $\bar{\varepsilon}_t$, то погрешность по модулю еще немного увеличивается.

Предположим, что осевые пластические деформации ε_z не равны нулю, что справедливо, например, при наличии наружного давления на цилиндрическую часть, и мы знаем кольцевые деформации срединного радиуса ε_t . При пластическом деформировании должно соблюдаться условие сохранения объема выделенного кольца $2\pi r_o s_o l_o = 2\pi r s l$.

$$\text{Отсюда } r_o s_o l_o = r s l = s r_o e^{\varepsilon_t} l_o e^{\varepsilon_l}, \text{ следовательно } s = \frac{s_o}{e^{\varepsilon_t} \cdot e^{\varepsilon_l}} = \frac{s_o}{e^{(\varepsilon_t + \varepsilon_l)}}. \text{ Т.е. } \varepsilon_s = -(\varepsilon_t + \varepsilon_l).$$

Это выражение для текущей толщины стенки справедливо и в том случае, если площадь кольца и его изменения рассчитывать через внутренний и наружный радиусы. Причем значение площади определенной таким образом все равно совпадает со значением $2\pi r_o s_o$.

При проведении замеров мы измеряем наружный периметр баллона - рулеткой, и его толщину стенки - ультразвуковым толщиномером, не важно в каком состоянии, в первоначальном, после пластических деформаций или во время их. Фактический наружный диаметр баллонов вычисляется через замеренный наружный периметр ($P_{нар}$) по формуле

$$\text{приведенной в [10]: } D_{нар} = \frac{P_{нар}}{3,1416} - 2 \cdot h_{рул}^{-0,2}, \text{ где } h_{рул} - \text{толщина рулетки. Понятно, что в}$$

таком случае наружный диаметр является эквивалентным. И далее:

$$r_o = \frac{D_{2o} - s_o}{2}, r = \frac{D_2 - s}{2} = \frac{r_o s_o}{s}.$$

Если, например, нет возможности померить толщину стенки s , то на нее можно выйти.

$$\text{Т.к. } r_o s_o = r s, \text{ т.е. } r_o s_o = \left(r_2 - \frac{s}{2} \right) s = r_2 s - \frac{s^2}{2} \Rightarrow s^2 - 2r_2 s + 2r_o s_o = 0, \text{ решая квадратное уравнение,}$$

$$\text{получим: } s = r_2 - \sqrt{r_2^2 - 2r_o s_o} = r_2 - \sqrt{r_2^2 - (2r_{2o} - s_o)s_o}, \text{ и в итоге находим } r \text{ и } r_2 = r + \frac{s}{2}.$$

При малых диаметрах их замеряют посредством штангенциркуля в нескольких положениях на одном сечении и берут среднюю, дабы уйти от овальности.

Т.к. при увеличении внутреннего давления в баллоне находящемся в полной пластике, изменения внутренней и наружной площадей поперечного сечения, по отношению к начальному состоянию одинаковы, обозначим их через $\Delta A = \Delta A_1 = \Delta A_2$, а пластическое изменение длины равно нулю, то можно написать, что равны и изменения соответствующих объемов, обозначим их через $\Delta W = \Delta W_1 = \Delta W_2$.

$$\begin{aligned} \Delta W_2 &= \pi l_0 (r_2^2 - r_{20}^2) = \pi l_0 \left(\left(r_o e^{\varepsilon_t} + \frac{s_o}{2e^{\varepsilon_t}} \right)^2 - \left(r_o + \frac{s_o}{2} \right)^2 \right) = \pi l_0 \left(r_o^2 (e^{2\varepsilon_t} - 1) - \frac{s_o^2}{4} (1 - e^{-2\varepsilon_t}) \right) = \\ &= \pi l_0 \left(r_o^2 (e^{\sqrt{3}\varepsilon_i} - 1) - \frac{s_o^2}{4} (1 - e^{-\sqrt{3}\varepsilon_i}) \right) \end{aligned}$$

Мы определили изменение объема связанного с наружным радиусом, если s_o умножим на -1, то получим изменение объема связанного с внутренним радиусом, и значение этих объемов полностью совпадают, т.е. $\Delta W_1 = \Delta W_2$.

Пластическое увеличение объема связанного со срединным радиусом следующее:

$$\Delta W = \pi l_o (r^2 - r_o^2) = \pi l_o r_o^2 \left(e^{\sqrt{3}\varepsilon_i} - 1 \right) = W_o (\exp(\sqrt{3}\varepsilon_i) - 1).$$

А т.к. зависимость: $y = e^x$, на интервале $x = 0 \dots 0,2$ практически линейная, и эта линейность очень плавно нарушается с увеличением второй границы интервала, то зависимость $\Delta W = f(\varepsilon_i)$, при таких же деформациях также будет практически линейна.

При анализе формулы, полученной для наружного и внутреннего радиусов, видно, что выражения с экспонентой заключенные во внутренние скобки, при малых деформациях, от 0 до 0,1, 0,2 имеют один порядок и первая скобка больше второй соответственно в 1, 1,189, 1,414 раза, а s_o^2 на много будет меньше чем r_o^2 , т.е. если s_o меньше r_o в 10 раз, то s_o^2 будет меньше чем r_o^2 , в 100 раз. Т.е. второе слагаемое можно вообще пренебречь, и совсем незначительно завязать окончательный результат. Т.е. $\Delta W_1 = \Delta W_2 \approx \Delta W$.

13. Определение остаточных кольцевых деформаций при проведении гидравлических испытаний.

Для оценки деформаций, при проведении гидроиспытаний, можно непосредственно замерять наружный диаметр или получать его через измерение периметра. Производить замеры из соображений безопасности лучше всего после сброса нагрузки, тем более, если баллон претерпевает большие пластические деформации. Таким образом, замерам подлежат остаточные деформации, а именно кольцевые остаточные деформации наружной поверхности баллона. Обозначим их через $\varepsilon_{\text{ост}}^* = \varepsilon_t^{*P}$. Понятно что

$\varepsilon_{t^*}^P = \ln\left(\frac{r_{ocm} + 0,5 \cdot s_{ocm}}{r_o + 0,5 \cdot s_o}\right)$, где r_{ocm} и s_{ocm} - остаточные значения радиуса срединной

поверхности и толщины стенки. Поскольку $\varepsilon_{tocm} = \varepsilon_t^P = \ln\left(\frac{r_{ocm}}{r_o}\right)$, $\varepsilon_{socm} = \varepsilon_s^P = \ln\left(\frac{s_{ocm}}{s_o}\right)$, и

$$\varepsilon_{socm} = -\varepsilon_{tocm}, \text{ имеем: } \varepsilon_{t^*}^P = \ln\left(\frac{r_o e^{\varepsilon_t^P} + 0,5 \cdot s_o e^{-\varepsilon_t^P}}{r_o + 0,5 \cdot s_o}\right).$$

Преобразуем данное выражение к следующему виду.

$$e^{\varepsilon_{t^*}^P} (r_o + 0,5 \cdot s_o) = r_o e^{\varepsilon_t^P} + 0,5 \cdot s_o e^{-\varepsilon_t^P} = e^{\varepsilon_t^P} \left(r_o + 0,5 \cdot s_o e^{-2\varepsilon_t^P} \right). \text{ И далее}$$

$$\varepsilon_t^P = \ln\left(\frac{e^{\varepsilon_{t^*}^P} (r_o + 0,5 \cdot s_o)}{r_o + 0,5 \cdot s_o e^{-2\varepsilon_t^P}}\right).$$

Значение ε_t^P находится итерационно. На первой итерации, в правой части вместо ε_t^P ставится $\varepsilon_{t^*}^P$, а далее полученное значение ε_t^P левой части. И так несколько раз. Процесс быстро сходится. Чем более толстостенный баллон, тем скорость схождения ниже.

Если в качестве остаточных деформаций срединной поверхности баллона (ε_t^P) принимать остаточные деформации наружной его поверхности ($\varepsilon_{t^*}^P$), то чем более толстостенный баллон, тем погрешность больше. С ростом же самих деформаций погрешность несколько снижается. Например, для баллона 219×6 при условных остаточных кольцевых деформациях срединной поверхности 0,05; 0,075; 0,1, соответствующие деформации наружной поверхности составляют 0,047; 0,071; 0,095 соответственно. Т.е. ошибка составила бы 5,51; 5,37; 5,24 %.

Напомним что в случае сброса нагрузки, приведшей к пластическим деформациям, верно следующее: $\varepsilon_{iocm} = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_{tocm}$, $\varepsilon_{socm} = -\varepsilon_{tocm}$, $\varepsilon_{zocm} = 0$, $r_{ocm} \cdot s_{ocm} = r_o \cdot s_o$.

При малых деформациях: $e^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon$. Чем больше деформация, тем ошибка увеличивается, причем нелинейно. Например, при $\varepsilon = 0,05$ ошибка составляет минус 0,12 %, а при $\varepsilon = 0,1$, уже минус 0,47 %.

14. Интерпретация напряжений.

Справедливо как для упругой, так и для пластической области нагружения. На рисунке За приведена геометрическая интерпретация напряжений для тонкостенной трубы с

днищами нагруженной внутренним давлением. Квадрат интенсивности напряжений σ_i^2 представляется как площадь заштрихованной части.

Поскольку, квадрат интенсивности напряжений равен: $\sigma_i^2 = \sigma_t^2 - \sigma_t \sigma_z + \sigma_z^2$, то дифференцируя его, получим: $2\sigma_i d\sigma_i = 2\sigma_t d\sigma_t - \sigma_t d\sigma_z - \sigma_z d\sigma_t + 2\sigma_z d\sigma_z$. Отсюда

$$d\sigma_i = \frac{2\sigma_t d\sigma_t - \sigma_t d\sigma_z - \sigma_z d\sigma_t + 2\sigma_z d\sigma_z}{2\sigma_i}.$$

При $\sigma_z = \frac{\sigma_t}{2}$ и $\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_t$, что справедливо для тонкостенной трубы с днищами нагруженной только внутренним давлением, естественно получаем тождество $d\sigma_i = d\sigma_i$.

При дополнительном действии наружного давления только на цилиндрическую часть, доля осевых напряжений возрастает. Когда кольцевые напряжения равны осевым, следует, что $\sigma_i = \sigma_t = \sigma_z$. Если положить $\sigma_z = k\sigma_t$, следовательно $\sigma_i = \sigma_t \sqrt{1-k+k^2}$. Отсюда $d\sigma_z = d(k\sigma_t) = k d\sigma_t$, $d\sigma_i = \sqrt{1-k+k^2} d\sigma_t$. Либо, $\sigma_i^2 = \sigma_t^2 - \sigma_t \sigma_z + \sigma_z^2 = \sigma_t^2 - k\sigma_t^2 + k^2\sigma_t^2$, дифференцируя обе части имеем, $2\sigma_i d\sigma_i = 2\sigma_t d\sigma_t - 2k\sigma_t d\sigma_t + k^2 2\sigma_t d\sigma_t$. Отсюда,

$$d\sigma_i = \frac{2\sigma_t - 2k\sigma_t + k^2 2\sigma_t}{2\sigma_i} d\sigma_t = \frac{\sigma_t (1-k+k^2)}{\sigma_i} d\sigma_t = \frac{\sigma_t (1-k+k^2)}{\sigma_t \sqrt{1-k+k^2}} d\sigma_t = \sqrt{1-k+k^2} d\sigma_t.$$

Поскольку $\sigma_i = \frac{\sigma_z}{k} \sqrt{1-k+k^2} = \sigma_z \sqrt{\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} + 1}$, то при гипотетическом стремлении k к

бесконечности, следует, что $\sigma_i \rightarrow \sigma_z$, оставаясь ниже ее на значение $\sigma_t \left(k - \sqrt{1-k+k^2} \right)$, которое в пределе равно $0,5 \cdot \sigma_t$.

Наружное давление, действующее только на цилиндрическую часть можно реализовать, например намоткой проволоки или ровинга под углом 90° , или близким к нему, к оси трубы. В таком случае бандаж не воспринимает напряжений вдоль оси трубы.

На рисунке 3б приведена зависимость отношений к кольцевому напряжению между интенсивностью напряжений и осевыми напряжениями.



Рис. 3. Интерпретация напряжений для тонкостенной трубы с днищами нагруженной внутренним давлением:

а - без наружного давления; б - отношение σ_i/σ_t , в зависимости от отношения σ_z/σ_t , для той же трубы, но при наличии наружного давления только на цилиндрическую часть.

О коэффициенте k . В случае трубы с днищами без наружного давления $k=1/2$, а в случае отсутствия днищ, независимо от внутреннего и наружного давлений, т.е. при отсутствии осевых напряжений в стенке трубы $k=0$. Значения $k < 0,5$, т.е. и нулевое, и отрицательные значения, свидетельствовали бы о наличии осевого подпора. Отрицательные значения также получаются и при преобладании наружного давления (только по цилиндрической части) над внутренним.

Значение функции на рисунке 3б при абсциссе 0,5 является минимальным. При уменьшении абсциссы, например при действии осевого подпора, функция начинает таким же образом расти. Рисунок 2б соответствует также и отрицательным значениям осевых и кольцевых напряжений, которые при определенных условиях могут быть реализованы.

15. Определение Коэффициента остаточного расширения при поэтапном нагружении баллона.

При однократном нагружении баллона неким давлением, коэффициент остаточного расширения определяется по формуле приведенной выше: $K_{op} = \frac{\Delta W_{ост}}{\Delta W_{полн}} = \frac{\Delta W_{полн} - \Delta W_{упр}}{\Delta W_{полн}}$, условно назовем его истинным.

Представим себе поэтапное нагружение баллона внутренним давлением. Максимальное давление каждого последующего этапа превосходит максимальное давление предыдущего. Затем оно сбрасывается до нуля. Поскольку нагружение осуществляется этапами, то полное

и остаточное изменения объема, необходимые для определения истинного коэффициента остаточного расширения, нужно брать с учетом данных предыдущих этапов. Таким образом, если бы нагружение произошло за один раз. Определение истинного значения коэффициента остаточного расширения, через данные полученные на предшествующих этапах также приведено в [9]. Там же приведены некоторые результаты при испытании кислородных 40-ка литровых баллонов. Поэтапное нагружение баллона необходимо для построения экспериментальной зависимости коэффициента остаточного расширения от давления либо от текущего коэффициента запаса прочности, см. рисунок 5.

Теорема:

Если на каждом i -том этапе нагружения баллона внутренним давлением, измерять его коэффициент остаточного расширения по определению: $(K_{op})_i = (\Delta W_{ост})_i / (\Delta W_{полн})_i$, где изменения объемов связаны только с этим этапом, причем давление каждого последующего этапа больше чем предыдущего, то истинный K_{op} последнего этапа ($K_{op} = \Delta W_{ост} / \Delta W_{полн}$) не будет равняться сумме предыдущих i -ых, он будет меньше. $K_{op} \neq \sum (K_{op})_i$,
 $K_{op} < \sum (K_{op})_i$.

На рисунке 4 приведена геометрическая интерпретация поэтапного нагружения баллона вплоть до разрушения.

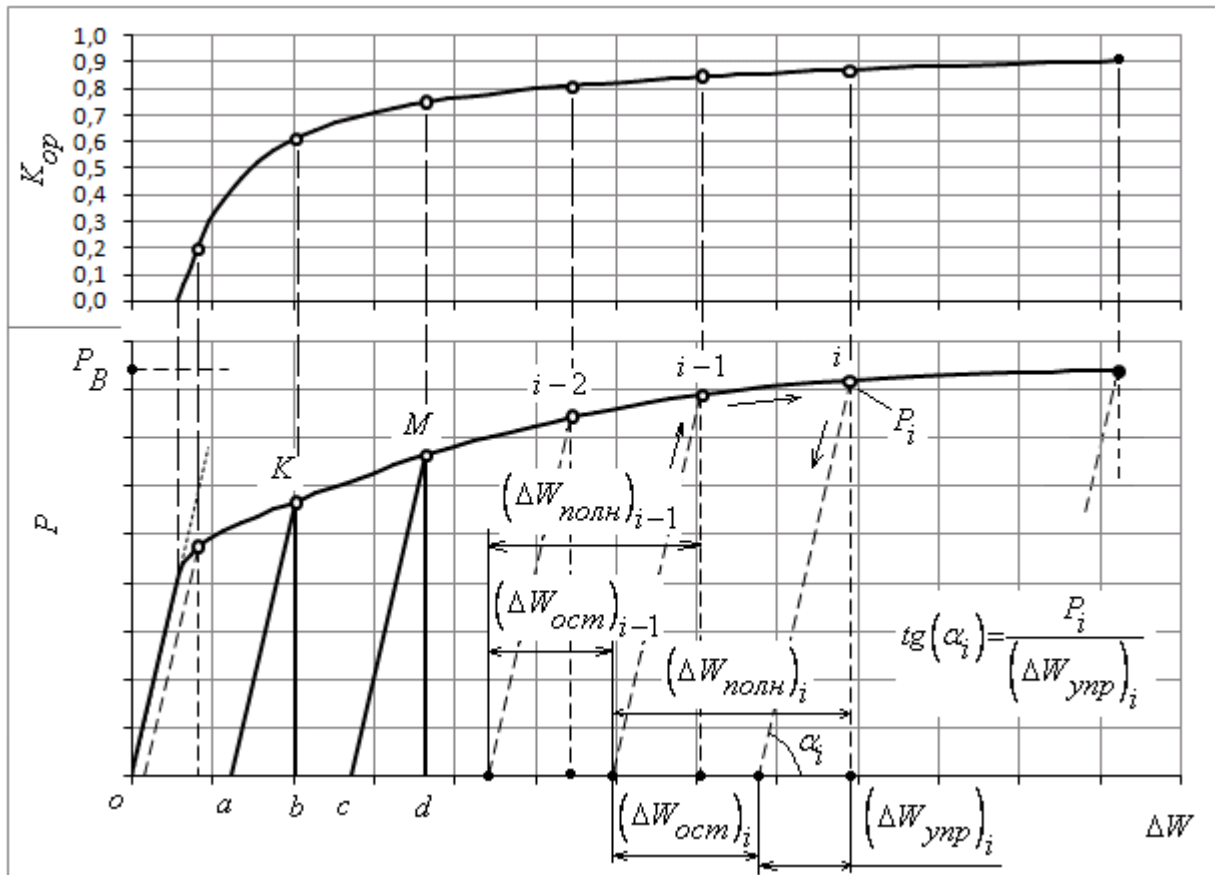


Рис. 4. К коэффициенту остаточного расширения промежуточного этапа.

Истинный коэффициент остаточного расширения в т. M равен oc/od , таким он будет, если мы сразу нагрузим баллон давлением до т. M . Если же мы нагрузили баллон до т. K и сбросили давление (линия Ka), а затем догрузим до т. M (линия aKM), и опять сбросим (линия Mc), то имеем:

$$\left(K_{op}\right)_K = oa/ob \text{ и } \left(K_{op}\right)_M = ac/ad, \quad \frac{oc}{od} \neq \frac{oa}{ob} + \frac{ac}{ad}. \text{ Если положим } ob=ad, \text{ следовательно,}$$

$$\frac{oa}{ob} + \frac{ac}{ad} = \frac{oa+ac}{ob} = \frac{oc}{ob} > \frac{oc}{od}.$$

Истинный коэффициент остаточного расширения в т. M равен $\frac{oc}{od} = \frac{ac+oa}{ad+oa}$, данную схему можно распространить на любое количество промежуточных этапов. Теорема доказана.

Истинный коэффициент остаточного расширения i -го этапа равен:

$$K_{op} = \frac{(\Delta W_{ост})_i + \sum_{n=1}^{i-1} \Delta W_{ост}}{(\Delta W_{полн})_i + \sum_{n=1}^{i-1} \Delta W_{ост}} < \sum_{n=1}^i (K_{op})_i.$$

Вообще, если $K_{op} < 1$, то $\sum (K_{op})_i$ может быть и намного больше единицы.

Текущий коэффициент запаса прочности можно представить в виде: $n_i = P_B / P_i$, где P_i - давление i -того этапа.

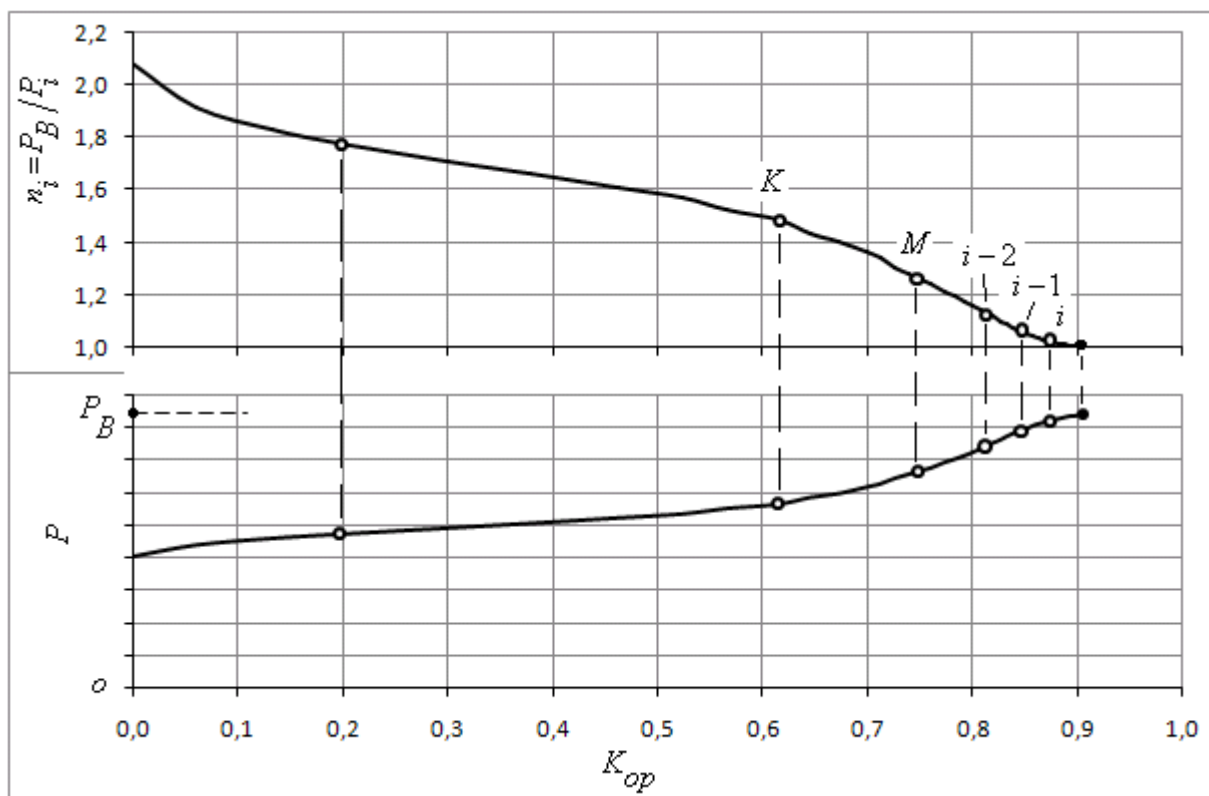


Рис. 5. Зависимость внутреннего давления и текущего коэффициента запаса прочности от коэффициента остаточного расширения. (Данные соответствуют рисунку 4).

Из рисунков 4 и 5 видно, что коэффициент остаточного расширения в упругой области работы равен нулю, наиболее чувствителен на начальных этапах пластической деформации, а затем очень слабо реагирует на дальнейшую пластическую деформацию.

Истинный коэффициент остаточного расширения на i -том этапе можно представить и так:

$$K_{ор} = \frac{\Delta W_{ост}}{\Delta W_{полн}} = \frac{\Delta W_{полн} - \frac{P_i}{\operatorname{tg}(\alpha_i)}}{\Delta W_{полн}}$$

16. Заключение.

Исследования проводились в рамках проекта: Marie Curie, SP-3 People «INNOPIRES», 7-й рамочной программы ЕС, грант PIRSES-GA-2012-318874.

Выводы:

- Зная действительную диаграмму деформирования стали, получаемую из диаграммы одноосного растяжения, можно однозначно связать напряжения и деформации в цилиндрической стенке тонкостенного баллона, при нагружении его внутренним давлением за пределы упругости.

- Используя действительную диаграмму деформирования и зная геометрические параметры тонкостенного баллона, можно построить зависимость изменения его объема от внутреннего давления в пластической области.

- При расчете тонкостенного баллона можно пользоваться деформационной теорией пластичности. При принятии коэффициента Пуассона равным 0,5 расчеты при больших пластических деформациях значительно упрощаются, но решения малых деформациях не сходятся к упругому решению.

Приложение.

Закон Гука для плоского напряженного состояния $\sigma_3=0$. Для главных направлений, (отсутствие на них касательных напряжений), что справедливо для элемента тонкостенной оболочки нагружаемой внутренним давлением.

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2) \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_1) \\ \varepsilon_3 = -\frac{\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) \end{array} \right\} \text{Отсюда следует: } \left. \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) \\ \sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1) \\ \varepsilon_3 = -\frac{\mu(1+\mu)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{1-\mu^2} \end{array} \right\} \quad (\text{П1})$$

Обобщенный закон Гука для главных направлений.

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)) \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)) \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)) \end{array} \right\} \text{Отсюда следует: } \left. \begin{array}{l} \sigma_1 = E \frac{\varepsilon_1(1-\mu^2) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)(\mu + \mu^2)}{(1-\mu^2) - 2\mu(\mu + \mu^2)} \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\} \quad (\text{П2})$$

Главные напряжения σ_2 и σ_3 определяются аналогично. Знаменатель в формуле для определения напряжений при $\mu=0,5$, равен 0.

Использованные источники:

1. Справочник по сопротивлению материалов / Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В.; Отв. ред. Писаренко Г. С. - 2-е изд., перераб. и доп. - Киев: Наук. думка, 1988. - 736 с. - ISBN 5-12-000299-4.
2. Сопротивление материалов. Электронный учебный курс для студентов очной и заочной формы обучения. Составитель: к.т.н., доцент кафедры теоретической и прикладной механики Каримов Ильдар. URL: <http://www.soprotmat.ru>.
3. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. М., «Наука», 1974, 559 с.
4. Остаточное расширение баллонов (краткий обзор) / Р. И. Дмитриенко, Э. Ф. Гарф, В. П. Чижиченко // Техн. диагностика и неразрушающий контроль . - 2014. - № 1. - С. 23-28. - Библиогр.: 25 назв. - рус. УДК 620.19.30.
URL: <http://new-idea.kulichki.net/pubfiles/140214224111.pdf>.
5. Дмитриенко Р. И. Упругое изменение объема бесшовных стальных баллонов, "К-фактор", ограничение напряжений // Рабочая записка: RZ DRI - 030816.
URL: <http://www.dri1.cc.ua/RZ/RZ-DRI-030816.pdf>.
6. Дмитриенко Р. И. Пластические деформации после гидроиспытаний внутренним давлением до разрушения, на примере разнотолщинной тонкостенной цилиндрической гильзы с днищами изготовленной из стали 20. Действительная диаграмма деформирования // Рабочая записка: RZ DRI - 050516. URL: <http://www.dri1.cc.ua/RZ/RZ-DRI-050516.pdf>.
7. Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М., «Машиностроение», 1977, 144 с.
8. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. Учебник для студентов вузов. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., «Машиностроение», 1975. - 400 с. с ил.
9. Дмитриенко Р. И., Масючок О. П., Быков А. В. Остаточное расширение баллонов. Промежуточные результаты испытаний. - In: Proceedings of the XXIX International Conference "NDT 2014" (Sozopol, Bulgaria), 2014, 561-566.
URL: <http://new-idea.kulichki.net/pubfiles/140926233613.pdf>.
10. ГОСТ 10706-76 - Трубы стальные электросварные прямошовные. Технические требования.
11. Куркин С.А. Прочность сварных тонкостенных сосудов, работающих под давлением. М.: Машиностроение, 1976.-184 с.

*** $\underline{u \uparrow a}$ ***

Текст: <http://www.dri1.cc.ua/RZ/RZ-DRI-211016.doc>

Дмитриенко Р. И. Упругие и пластические деформации на примере цилиндрического тонкостенного стального баллона. Изменение объема. Часть 1, теоретическая // Рабочая записка: RZ DRI - 211016. URL: <http://www.dri1.cc.ua/RZ/RZ-DRI-211016.pdf> (дата обращения: 14.09.2018).

© Роман Игоревич Дмитриенко. (Roman Dmytrienko). Моб.: +380688579600.

SPIN- код: 5715-5773. www.orcid.org/0000-0001-8842-5051.

YouTube: <https://www.youtube.com/channel/UCBEzDeXFjUeCKCN6nUYqsQA>.

Сайт: <http://www.dri1.cc.ua>. E-mail: dri1@ukr.net. Skype: dri1dri1. Украина.